

Universidad EAFIT  
Departamento de Ciencias Básicas

# Los Sistemas Dinámicos Relacionados con el Efecto Josephson

**Tesis de Maestría en Matemáticas Aplicadas presentada por**

Edgar Montealegre Cárdenas    cod. 200410027016

**Director**

Dr. Mauro Montealegre Cárdenas

Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Surcolombiana

Universidad EAFIT  
Maestría en Matemáticas aplicadas  
Medellín

Abril 2008

Universidad EAFIT  
Departamento de Ciencias Básicas

# Los Sistemas Dinámicos Relacionados con el Efecto Josephson

**Tesis de Maestría presentada por**

Edgar Montealegre Cárdenas    cod. 200410027016

Universidad EAFIT  
Medellín

Abril 2008



## *Agradecimientos*

Agradezco a Dios por darme esta oportunidad de mejorar mis conocimientos; a la universidad EAFIT por abrirnos las puertas al conocimiento científico; a mi madre, esposa e hija, quienes han comprendido la importancia de este proceso; al profesor Mauro Montealegre, mi hermano, por su permanente asesoría; a mis colegas Gustavo Londoño Betancourt, Jasmidt Vera Cuenca por sus juiciosas crítica y aportes para el mejoramiento; y a mi amigo Yankely Sánchez Espítia, quien me colaboró en aspectos técnicos.

Con este trabajo quiero rendir homenaje al Ingeniero Galo Montealegre Cárdenas, mi hermano quien también comenzó estos estudios y nos dió ejemplo de perseverancia, entusiasmo y dedicación a la investigación científica y aplicada.

*Edgar Montealegre Cárdenas*



---

## Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. La Función “Bump” . . . . .	3
1.2. El Lagrangiano . . . . .	6
1.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	10
1.4. La Función de Melnikov . . . . .	11
1.5. La Ecuación Variacional. . . . .	12
1.6. El problema de autovalores para el modelo de Sturm-Liouville. . . . .	13
1.7. El fenómeno de la Intermitencia, otra ruta hacia el caos. . . . .	14
1.8. Lazo homoclínico $\Gamma$ ligados a un equilibrio del tipo Silla-foco. . . . .	15
1.9. Histéresis (relacionada con la elasticidad) . . . . .	17
1.10. Teoría de los semiconductores de Ginzburg-Landau . . . . .	18
1.11. Modelo experimental del efecto Josephson . . . . .	22
<b>2. La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson</b>	<b>27</b>
2.1. Descripción del modelo . . . . .	27
2.2. Fundamentos físicos . . . . .	27
2.3. Relaciones de Josephson . . . . .	28
2.4. Equivalencia entre un circuito del fenómeno de la unión de Josephson y la ecuación del péndulo . . . . .	29
2.5. Valores Típicos de los Parámetros . . . . .	30
2.6. Valor del voltaje promedio $\langle v \rangle$ como función de la corriente $I$ , en el caso superamortiguado. . . . .	32

2.7.	Histéresis en la unión de Josephson . . . . .	34
2.7.1.	La cantidad y cualidad de los equilibrios . . . . .	35
2.7.2.	Existencia de Órbitas Periódicas . . . . .	35
2.7.3.	Unicidad de la órbita periódica . . . . .	37
2.7.4.	Conexiones heteroclínicas . . . . .	39
2.8.	El modelo espacio-temporal de tunelamiento superconductor. .	40
<b>3.</b>	<b>Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson</b>	<b>43</b>
3.1.	El modelo largo de unión de Josephson . . . . .	43
3.2.	Teoría cualitativa de la curva característica de la unión larga de Josephson . . . . .	44
3.3.	Las curvas característica de Josephson $I - v$ forzadas por un campo magnético alternante . . . . .	47
3.4.	Trayectoria homoclínicas y solitones. . . . .	49
<b>4.</b>	<b>Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los <math>\pi</math>-saltos en una <math>0 - \pi</math> unión de Josephson.</b>	<b>57</b>
4.1.	Introducción . . . . .	57
4.2.	El modelo para la $0 - \pi$ ecuación discreta de Sine-Gordon . .	58
4.3.	Aproximación para el retículo espacial en el límite continuo .	59
4.4.	El $\pi$ -salto y su espectro en el límite continuo . . . . .	61
4.5.	Estabilidad para los diversos tipos de $\pi$ -fluxones. . . . .	70
4.5.1.	Estabilidad para las soluciones de tipo 1. . . . .	70
4.5.2.	Inestabilidad para las soluciones de tipo 2 y 3: . . . . .	71
4.5.3.	Retículo de $\pi$ -saltos en el límite continuo. . . . .	71
4.6.	Resumen sobre semi-fluxones en la unión larga de Josephson con $\pi$ -discontinuidad. . . . .	72
<b>5.</b>	<b>Control, acoplamiento y sincronización en la unión de Josephson</b>	<b>77</b>
5.1.	Control a través de sistemas singularmente perturbados. . . .	77
5.1.1.	El péndulo periódicamente excitado en amplitud $0(\varepsilon)$ . .	77
5.1.2.	El péndulo paramétricamente forzado en amplitud $0(1)$ y frecuencia $0(\varepsilon)$ . . . . .	79
5.1.3.	El péndulo remolino. . . . .	80
5.1.4.	Oscilador de Duffing con control de retroalimentación: .	82
5.1.5.	Unión de Josephson con problemas de valores de frontera singularmente perturbadas. . . . .	82
5.1.6.	La dinámica del modelo Sine-Gordon singularmente perturbado. . . . .	84

---

5.2. Modo de Posición fija y transición al caos en sistemas disipativos.	88
5.2.1. Descripción del modelo. . . . .	88
5.2.2. El modo de posición fija (Mode-Locking) y la universalidad de los mapeos sobre el círculo. . . . .	91
5.3. Sincronización de rotores y la unión de Josephson. . . . .	94
5.4. Los osciladores acoplados . . . . .	95
5.5. Serie de arreglos globalmente acoplados de uniones de Josephson.	98
<b>Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>





---

## Introducción

---

En esta tesis explicamos el modelo matemático asociado al fenómeno de unión de Josephson, el cual surge de la física cuántica y tiene e importantes aplicaciones tecnológicas. Para ubicar esta problemática en el capítulo I presentamos todos los conceptos necesarios.

Es fundamental el método analógico para estudiar este sistema desde la complejidad del sistema pendular, así conocemos el flujo asociado a nuestro problema y su ecuación de bifurcación básica  $I - V$ , para la cual se estudian diversas variantes del problema. Este aspecto se estudia en el capítulo II.

A través de una perturbación de la ecuación de Sine-Gordón, estudiamos la unión larga de Josephson en términos espacio-temporal; lo que se logra por el surgimiento de solitones asintóticos a sus equilibrios. Esta versión del problema es mucho mas compleja y se estudia en el capítulo III.

El estudio de estabilidad de soluciones con saltos se realiza en torno de ciertas soluciones periódicas o solitónicas (llamadas también homoclínicas ó heteroclínicas, según el caso); este interesante caso se resuelve mediante la linealización global en torno de las recurrencias mencionadas. Este aspecto se trata en el capítulo IV.

Finalmente estudiamos fundamentos de control, acoplamiento y sincronización; los cuales surgen de la dinámica que produce el fenómeno de la unión Josephson. Son conceptos básicos que se derivan del conocimiento de las relaciones entre parámetros y/o variables. Para este estudio damos especial tratamiento a la solución del problema de Josephson con condiciones de

## 2 Introducción

---

frontera con una perturbación singular. Esto lo tratamos en el capítulo V.

El estudio detallado que hemos realizado en este trabajo de grado ha sido posible por la consulta a las siguientes referencias: [Fey], [S,STR], [F.Hopp], [Y.KuZ], [S.Wig], [C.Chi], [J.Cr R.O, O'malley], [Fey], [A. Pik, M.Ros, J. Kur], [A.G Mak V.I Nek], [ Su Vgils ], [T. Bo, M.H Je], [F.Xi H. Cedeira], [G. Des, A. Dol, S.a.VGil, HSus.], [K.L], [Si, Zi], [VaV], [Shi, Bely].

Esperamos continuar con este proceso de investigación, ampliando nuestro conocimiento sobre “Los sistemas Dinámicos del efecto Josephson,” pues es una línea de trabajo que promete necesitar cada vez mejores modelos matemáticos para aplicarlos significativamente a nuevas tecnológicas.

# CAPÍTULO 1

---

## Conceptos preliminares

---

### 1.1. La Función “Bump”.

Sea,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leq 0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Entonces  $f(x)$  es suave; en particular  $f^n(0) = 0$  para todo  $n \geq 0$ .

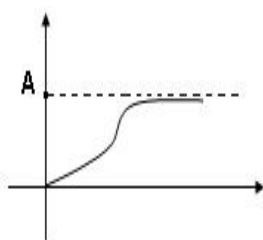


Figura 1.1: *Función infinitamente diferencial en cero.*

**Prueba.** Es claro que  $f(x)$  es suave excepto  $x = 0$ . Entonces nosotros solo necesitamos verificar que  $f^n(0) = 0$   $n \geq 0$ . (Note que si nosotros probamos que  $f^n(0) = 0$ , esto implica que  $f^{(n-1)}(x)$  es continua en  $x = 0$ ). Es obvio que  $f^{(n-1)}(x)$  cuando  $x = 0$ . Entonces si nosotros probamos todas las derivadas

## 4 Conceptos preliminares

---

existen automáticamente vemos que son continuas. Primero que todo, vemos que  $f' = 0$ , aproximándolas a cero por la izquierda,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0. \quad (1.1.2)$$

El otro limite lateral es

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} = 0 \quad (1.1.3)$$

Allí sustituimos a  $y = \frac{1}{x}$  y usamos L'Hopital, como los limites izquierdo y derecho son iguales, tenemos  $f'(0) = 0$ .

Para derivadas superiores,  $x > 0$ ,  $f'(0) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ . Se demuestra por inducción que todas las derivadas de orden superior tienen una forma similar para  $x > 0$ ,

$$f'(0)(x) = P_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \quad (1.1.4)$$

donde  $P_n$  una función polinomial.

**Prueba.** Tenemos que revisar que para  $n = 1$ ,  $x > 0$ ,  $f'(x)$  es de la forma  $P_1 \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$  para  $P_1(y) = y^2$ . Ahora asumimos que  $f^n(x) = P_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$  para  $x > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= P'_n \left( \frac{1}{x} \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} + P_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x^2} \right) \\ &= P_{n+1} \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

para  $P_{n+1}(y) = -y^2 P_n(y)$ , el cual es un polinomio siempre que  $P_n$ .

Entonces tenemos que revisar que  $f'(x) = f^{(1)}(x)$  satisface la hipótesis, y también que si la hipótesis es cierta para  $f^{(n)}(x)$ , entonces es cierto para  $P^{n+1}(x)$ . Usamos la inducción para mostrar nuevamente que  $f^n(0) = 0$ . Ahora asumimos que  $f^n(0) = 0$ . Para el calcular  $f^{(n+1)}(0)$ , el límite izquierdo es 0 y el limite derecho es:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^n(x) - f^n(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} P_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{P}_n \left( \frac{1}{x} \right)}{e^{\frac{1}{x}}} \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\tilde{P}_n(y)}{e^y} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

De  $y = \frac{1}{x}$  tenemos que  $\tilde{P}_n(y) = yP_n(y)$  es otro polinomio. Los límites izquierdo y derecho ambos son nulos, tenemos  $f^{(n+1)}(0) = 0$ , lo cual completa la inducción.

**Proposición 2.** Dado  $a < b$ , existe una función suave  $h(x)$  tal que  $h(x) = 0$  para  $x \leq a$ ,  $0 < h(x) < 1$  para  $x \in (a, b)$ , y  $h(x) = 1$  para  $x \geq b$ .

**Prueba.** Primero hacemos  $g(x) = f(x-a)f(b-x)$  para  $f$  definido arriba. Esta claro que  $g$  es suave, no negativa y  $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (a, b)$ . Entonces definimos

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^x g(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt}. \tag{1.1.7}$$

Es fácil observar que  $h(x)$  tiene propiedades relevantes.

**Proposición 3.** Haciendo  $0 < a < b$ . Entonces existe una función de valor real suave  $i(z) = \tilde{h}(|z|)$  en  $\mathbb{R}^k$ , tal que  $i(z) = 1$  si  $|z| \leq a$  y  $0 < i(z) < 1$  si  $|z| \in (a, b)$ , y es 0 para  $|z| \geq b$ .

Hacemos  $\tilde{h} = 1 - h(x)$ , donde  $h(x)$  es como arriba. Entonces la función  $i(z) = \tilde{h}(|z|)$  satisface las propiedades. En particular, la regla de la cadena muestra que  $i(z)$  es suave excepto posiblemente en  $z = 0$ . Pero en una vecindad de  $z = 0$ ,  $i(z)$  es igual a 1, entonces allí es suave también,  $i(z)$  es la función “bump”.

## 6 Conceptos preliminares

---

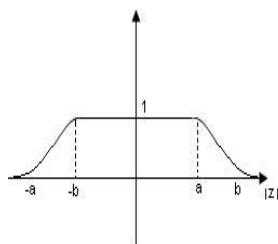


Figura 1.2: *Función del tipo "bump".*

### 1.2. El Lagrangiano

Consideramos una función suave

$$L : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

un par de puntos  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^k$ , dos números reales  $t_1 < t_2$  y un conjunto  $C = C(P_1, P_2, t_1, t_2)$  constituidas por curvas suaves  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  tales que  $q(t_1) = P_1$  y  $q(t_2) = P_2$

Usando estos datos, vemos que existe una función  $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (1.2.1)$$

es la ecuación de Euler-Lagrange, es una ecuación diferencial asociada a la función  $L$ , llamada el Lagrangiano.

Encontramos los puntos extremos de la función  $\phi$ ; esto es, a partir del concepto de la derivada direccional de una función escalar definida sobre un espacio de curvas, el punto extremo corresponde al punto en el cual la derivada direccional se anula.

Para obtener este punto extremo y para una curva  $\gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , definimos nuestra "curva de curvas", como la variación de curvas en  $C$  a través de la siguiente función suave  $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ; con condiciones de frontera  $Q(s, t_1) \equiv P_1$ ,  $Q(s, t_2) \equiv P_2$  como  $Q(s, t) \equiv \gamma(s)(t)$ ; esto es, para  $q \in C$  con  $\gamma(0) = q$  tenemos  $Q(0, t) = q(t)$ .

El vector tangente a  $\gamma$  en  $q$  es la curva  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  dado por  $t \rightarrow (q(t), \dot{q}(t))$ , donde su segunda componente es

$$\vartheta(t) = \frac{\partial}{\partial s} Q(s, t)|_{s=0} \quad (1.2.2)$$

Por supuesto,  $\vartheta$  no esta usualmente en  $C$ , pero sí satisface el siguiente par de condiciones:

$$\vartheta(t_1) = \frac{\partial}{\partial s} Q(s, t_1)|_{s=0} = 0, \vartheta(t_2) = \frac{\partial}{\partial s} Q(s, t_2)|_{s=0} = 0;$$

esto permite ver a  $V$  como un elemento del “espacio tangente de  $C$  en  $q$ .”

Con estos elementos la derivada direccional  $D\phi(q)V$  de  $\phi$  en  $q$  en la dirección  $V$  es definida así:

$$\begin{aligned} D\phi(q)V &= \frac{\partial}{\partial s} \phi(Q(s, t_1))|_{s=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} L(Q(s, t), \frac{\partial}{\partial t}(s, t), t)|_{s=0} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial s \partial t})|_{s=0} dt; \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

después de evaluar en  $s = 0$  y de integrar por partes, podemos reescribir esta ecuación para obtener:

$$\begin{aligned} D\phi(q) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \right] \frac{\partial Q}{\partial s}(0, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) \right] \vartheta(t) dt. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Si  $D\phi(q)V = 0$  para todo vector  $V$ ; entonces la curva  $q$  es llamada una extremal, en otras palabras,  $q$  es una extremal si la última integral de la ecuación (1.2.4) se anula para toda función suave  $\vartheta$ , la cual es nula en  $t_1$  y  $t_2$ . En total tenemos la siguiente proposición:

**Teorema 1.1.**

La curva  $q$  es un extremal de  $\phi$  si y solo si es una solución de la siguiente ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.2.5)$$

Ejemplo 1. La ecuación de péndulo invertido se obtiene así: sea la función suave y periódica cuyo periodo es  $(L/g)^{\frac{1}{2}}$ ; con parámetros de control  $\delta$  (la amplitud) y  $\Omega$  (el desplazamiento vertical), así que la función desplazamiento es



## 8 Conceptos preliminares

---

$$t \rightarrow \delta H(\Omega t) \quad (1.2.6)$$

Entonces el desplazamiento puede ser visto como una fuerza externa con período  $(L/g)^{\frac{1}{2}}/\Omega$ , y la fuerza entonces será:

$$F := m\Omega^2 H''(\Omega t) \text{sen}\theta, \quad (1.2.7)$$

la fuerza externa es percibida como un cambio en el campo gravitacional dependiendo del tiempo (‘‘ Einstein elevator’’), y entonces la nueva constante gravitacional es dada por

$$g = \Omega^2 \delta H''(\Omega t) \text{sen}\theta, \quad (1.2.8)$$

y la ecuación del movimiento se obtiene reemplazando el  $g$  dado en (1.2.8) en la siguiente ecuación

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL\text{sen}\theta = 0, \quad (1.2.9)$$

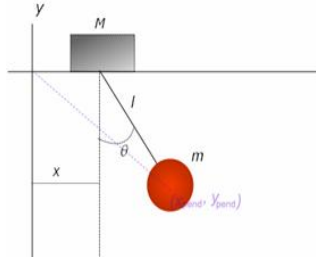


Figura 1.3: *El péndulo usual*

la cual es la ecuación del péndulo usual y surge del principio de conservación de energía con lagrangiano:

$$\begin{cases} \mathcal{L} := k - \text{U} = \frac{m(L\dot{\theta})^2}{2} + mgL\cos\theta \\ \frac{d}{dt} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\theta}} - \frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = 0; \end{cases} \quad (1.2.10)$$

entonces de (1.2.7) obtenemos la ecuación del péndulo invertido:

$$\frac{d}{dt} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\theta}} - \frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = F \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \text{sen}\theta = \delta \frac{\Omega^2}{L} H''(\Omega t) \text{sen}\theta; \quad (1.2.11)$$

esta última ecuación (2.1.11) se puede reescalonar usando los siguientes cambios de variables:  $t = \left(\frac{L}{\Omega^2 g}\right)^{\frac{1}{2}} s$ ;  $\alpha := \frac{1}{\Omega^2}$ ;  $\beta := \delta$ ;  $a(s) := \frac{1}{g} H''\left(\left(\frac{L}{g}\right)^{\frac{1}{2}} s\right)$ ; para obtener

$$\theta'' + (\alpha - \beta\alpha(s))\text{sen}\theta = 0; \quad (1.2.12)$$

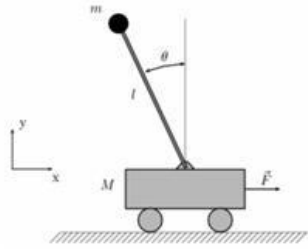


Figura 1.4: *Péndulo invertido*

en (1.2.12) tenemos que la función  $s \rightarrow a(s)$  es periódica con período uno.

Si  $a(s) = \text{sen}(2\pi s)$  en (1.2.12) y la matriz fundamental  $\phi(t, \alpha, \beta)$  (esto es, la matriz de  $2 \times 2$ ,  $t \rightarrow \Psi(t)_{2 \times 2}$ , cuyas columnas son soluciones linealmente independientes) del sistema tenemos:

$$\phi' = A(s)\phi \Leftrightarrow \begin{cases} w' = z \\ z' = (\alpha, \beta\alpha(s))w, \end{cases} \quad (1.2.13)$$

entonces la solución trivial de (1.2.13) es estable si

$$|\text{traza}\phi(1, \alpha, \beta)| < 2. \quad (1.2.14)$$

En  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  se tiene

$$\phi(1, 0, 0) = \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.15)$$

Visto de otra manera, para la función  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $(\alpha, \beta) \rightarrow \text{traza}\phi(1, \alpha, \beta)$ , podemos obtener

$$\phi'_\alpha = A(s)\phi_\alpha + A_\alpha(s)\phi$$

con

$$\phi'_\alpha = 0; \quad (1.2.16)$$

y para  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  la ecuación variacional es

$$\begin{aligned} w' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi(s, 0, 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & s \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

el cual se resuelve por variación de parámetros y se obtiene

$$\phi_\alpha(1, 0, 0) = w(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.2.18)$$

De (1.2.15) obtenemos  $\tau_\alpha(0, 0) = 1$ .

Como la linealización de (1.2.12) alrededor de  $\theta = 0$  es  $w'' + (\alpha - \beta a(s))w = 0$ ; su matriz fundamental  $\Psi(t, \alpha, \beta)$  en  $t = 0$ , hace que traza  $\Psi(1, \alpha, 0) = 2\cos\sqrt{\alpha}$  intercepte el eje  $\alpha$  solo si  $\sqrt{\alpha}$  es múltiplo de  $\pi$ .

Como  $\alpha = \frac{\ell}{\Omega^2}$ , se tiene que la solución cero es inestable para pequeños desplazamientos de la amplitud si existe un entero “ $n$ ” tal que el período del desplazamiento es:

$$\frac{1}{\Omega} \left( \frac{L}{g} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{2} \left( 2\pi \left( \frac{L}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (1.2.19)$$

Ejemplo 2. Para la EDP  $\nabla^2 \phi = f$  en  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , con condiciones de frontera  $\phi = \theta$  en  $\partial D$ ; entonces  $\min L(\phi) = \int \int (\phi_x^2 + \phi_y^2) dx dy$ .

### 1.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de la ecuación diferencial definida en  $\Omega$

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3.1)$$

Una función  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto abierto con  $x_0 \in \Omega$ , es llamada una función de Lyapunov para (1.3.1) en una vecindad  $\Omega$  de  $x_0$  si:

- i  $V(x_0) = 0$
- ii  $V(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega - \{x_0\}$
- iii  $\dot{V}(x) = \frac{dv(x(t))}{dt} = \text{gradiente } V(x(t)) \cdot f(x) \leq 0$

iv si  $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega - \{x_0\}$  es una función estrictamente negativa de Lyapunov.

Observe que  $\frac{d}{dt}V(\phi_t(y)) \big|_{t=0} = \text{grad}V(y) < 0$  es normal al conjunto  $S_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c\}$ , donde  $t \rightarrow \phi_t(y)$  es el flujo de (1.3.1).

Por ejemplo, el sistema  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -w^2 y \end{cases}$  tiene un punto de equilibrio en  $(0, 0)$  y  $V(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 + w^2 x^2)$  es una función de Lyapunov en tal equilibrio.

## 1.4. La Función de Melnikov

Sea  $\dot{x} = f_0(x)$  con  $x \in \mathbb{R}^2$  una ecuación diferencial con un punto de equilibrio en  $x_0 = 0$ , asumamos que dicho punto de equilibrio es una silla con una conexión homoclínica como se ilustra en la figura 1.4. Si consideramos el flujo en  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  definida por

$$\dot{x} = f(x), \dot{\theta} = 1 \quad (1.4.1)$$

el equilibrio de (1.3.1) se convierte en una órbita periódica  $\gamma_0 = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / x = 0, \theta \in S^1\}$  del tipo silla en un cilindro, como se ilustra también en la siguiente figura 1.5

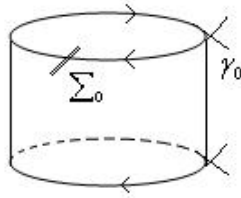


Figura 1.5: Conexión homoclínica en  $\mathbb{R}^2 \times S^1$

Para pequeñas perturbaciones de (1.4.1) tenemos el siguiente campo perturbado:

$$\dot{x} = f_0(x) + \epsilon f_1(x, \theta), \dot{\theta} = 1 \quad (1.4.2)$$

Con  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  y además  $f_1(x, \theta) = f_1(x, \theta + 2\pi)$ . Las variedades invariantes de la solución  $\gamma_\epsilon$ ,  $W^u(\gamma_\epsilon)$  y  $W^s(\gamma_\epsilon)$ , no necesariamente se interceptan en el cilindro; y la función de Melnikov es a la distancia entre estas variedades definidas a través del mapeo de Poincaré definido en la sección transversal  $\Sigma_{\theta_0}$ :

## 12 Conceptos preliminares

---

$$M(\theta_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x_0(t - \theta_0)) \wedge f_1(x_0(t - \theta_0), t), dt \quad (1.4.3)$$

donde  $f_0 \wedge f_1 = f_{02}f_{12}$ . Las raíces de  $M(\theta_0)$  corresponden a las órbitas periódicas que se generan en las proximidades de la órbita homoclínica.

Por ejemplo el sistema de Duffing forjado débilmente, el cual se obtiene de las vibraciones mecánicas, es la siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x - x^3 + \varepsilon(\gamma \cos(wt) - \delta y)$$

con  $\gamma, \delta, w > 0$ , y  $0 < \varepsilon \ll 1$ ;  $F = [y, x - x^3]^T$ ,  $f = [0, \gamma \cos(wt) - \delta y]^t$  sistema para el cual  $\varepsilon = 0$  el origen es punto de silla nodo y con su órbita homoclínica es  $y^2 = x^2(1 - \frac{1}{2}x^2)$  con solución  $q_0(t) = \pm(\sqrt{2} \operatorname{sech} t, -\sqrt{2} \operatorname{sech}(t) \tan(t))$ ,  $q_0(t) = (\pm\sqrt{2}, 0)$ . Entonces la función de Melnikov es dada por la siguiente fórmula,

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(q_0(t - t_0)) \wedge f(q_0(t - t_0), t) dt = \\ &= (q_0(t - t_0))y_0(t - t_0)\{y \cos(wt) - \delta y_0(t - t_0)\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (s)\{y \cos w(s + t_0) - \delta y_0(s)\} ds \\ &= \sqrt{2}\gamma \operatorname{sen}(wt_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} s \cdot \tanh s \cdot \operatorname{sn}(ws) ds - 2\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 s \cdot \tanh^2 s ds \\ &= \sqrt{2}\pi y w \operatorname{sech}(\frac{1}{2\pi w}) \operatorname{sen}(wt_0) - \frac{4}{3\delta} \end{aligned}$$

luego si  $2\sqrt{2}\delta \cosh(\frac{\pi}{2}w) < \pi\gamma w$ , entonces  $M$  tiene un zero simple y hay caos para  $\varepsilon \neq 0$  pequeño; en caso contrario, cuando la desigualdad sea “ $>$ ”, no se genera caos en la ruptura de la órbita homoclínica.

### 1.5. La Ecuación Variacional.

Asumimos que  $\Omega$  es abierto y  $f$  tiene derivada continua en  $\Omega$ . Ahora consideramos el sistema asociado a la ecuación diferencial,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Donde  $(x, t) \rightarrow \phi(t, x) = \phi_t(x)$  es el flujo definido por (1.5.1); si  $Jf$ , el jacobiano de  $f$ , tenemos el siguiente sistema variacional:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(D\phi_t(x)) = Jf(\phi_t(x)) \cdot \phi_t(x) \\ D\phi_0(x_0) = I_{n \times n}, \end{cases} \quad (1.5.2)$$

donde  $I_{n \times n}$  es la matriz idéntica  $n \times n$ ; entonces la solución de (1.5.2) es  $D\phi_t(x_0) = x_0 e^{t \cdot A}$ , para  $A = Jf(\phi_0(x_0))$ .

## 1.6. El problema de autovalores para el modelo de Sturm-Liouville.

De otro lado, para la ecuación diferencial con condiciones de frontera siguiente (problema de Sturm):

$$\begin{cases} y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0 & x \in [a, b] \\ \beta_1\phi(a) + \beta_2\frac{d\phi}{dx}(a) = 0 \\ \beta_3\phi(b) + \beta_4\frac{d\phi}{dx}(b) = 0; \end{cases} \quad (1.6.1)$$

tenemos un operador lineal  $L(y) = \frac{d^2y}{dx^2} - q(x)y$ , y el problema de autovalores  $L(y) = \lambda y$ ; en particular para

$$y'' + (\lambda + x)y = 0 \quad (1.6.2)$$

con  $y(0) = y(1) = 0$ ; tenemos que los autovalores son  $\lambda_n = n^2\pi^2$  con autofunciones linealmente independientes  $\phi_i$ ,  $y \cos(n\pi x)$ , las cuales también son ortogonales y tienen  $n$  raíces en  $[0,1]$ .

Así que toda solución  $y(x)$  de (1.6.2) es dada por la siguiente combinación lineal:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{n^2\pi^2 x} \phi_n, \quad C_n = \frac{y(x_0) \cdot \phi_n}{\phi_n \cdot \phi_n} \quad (1.6.3)$$

Es de interés para (1.6.2) hallar el autovalor mínimo  $\lambda_1 = \pi^2$ ; y en otros casos verificar si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n < +\infty$ .

Recordando que la serie de Bessel  $J_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{1}{2}x)^{2n+\alpha}}{n! \Gamma(\alpha+n+1)}$  soluciona la ecuación diferencial  $x^2 w + xw' + (x^2 - \alpha^2)w = 0$ , y para una serie de Fourier

$$w = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(kx) + b_n \sin(kx)) \quad (1.6.4)$$

sus coeficientes son dados por  $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx) dx$  y  $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) dx$ ; entonces podemos invertir  $w = \text{esen}(u)$ , usando  $u = w + x$  donde

$$\text{esen}(u) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^\pi \text{esenu}(kx) dx \right) \sin(kx), \quad (1.6.5)$$

## 14 Conceptos preliminares

entonces  $u = x + \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_{\vartheta}(kx) \text{sen}(kx)$ , donde hemos usado que  $\text{ecos}(u) = 1 - \frac{dx}{du}$  con

$$J_{\vartheta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(ks - x \text{sen} s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\vartheta s - x \text{sen} s) ds \quad (1.6.6)$$

### 1.7. El fenómeno de la Intermitencia, otra ruta hacia el caos.

Si para un sistema continuo dependiente del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{x} = f(x; a)$  con  $a \in \mathbb{R}^n$ , existe una órbita periódica inestable cuando  $a \rightarrow a_c$  y además en  $a = a_c$  esta órbita periódica colapsa con otra órbita periódica próxima, de período mayor como se ilustra en la siguiente figura 1.6:

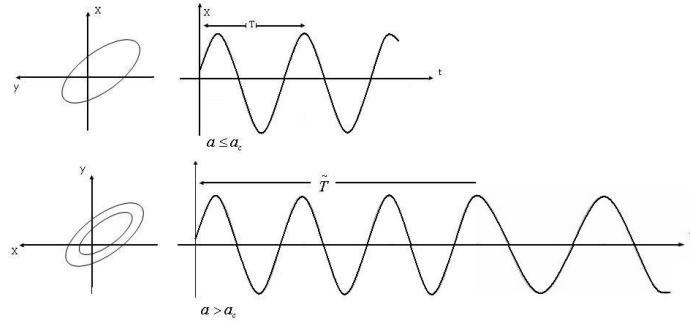


Figura 1.6: La explicación del fenómeno de intermitencia a través de la existencia de una órbita periódica crítica con período  $T(a_c)$ .

Cuando atraviesa  $a_c$  el ciclo límite llega a ser nuevamente inestable; para  $a = a_c > 0$ , aparece aleatoriamente de nuevo tal ciclo inestable, y la interrupción tiende a infinito tanto como  $(a - a_c)^{-\frac{1}{2}}$  cuando  $a \downarrow a_c$  (se aproxima a  $a_c$  por la derecha).

Para mapeos este fenómeno se puede ilustrar para  $f_{\mu}(x) = \mu + x - x^2$  cuando  $\mu \approx 0$  en un punto fijo no hiperbólico (del tipo silla-nodo); como se ilustra en la siguiente gráfica 1.7

Para  $u < 0$  los iterados gastan bastante tiempo en la región laminar (cerca de la órbita periódica); luego oscila y recupera aleatoriamente la misma órbita periódica.

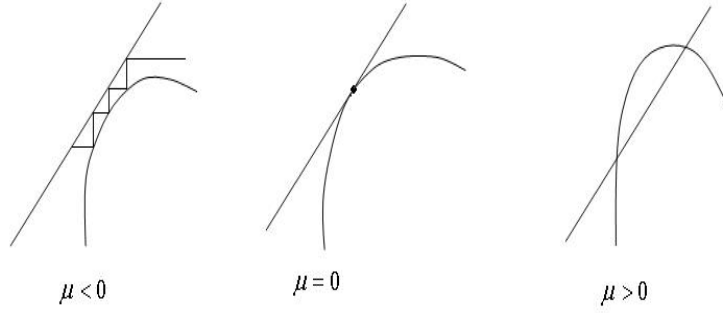


Figura 1.7: Explicación de la intermitencia a través de un punto fijo no hiperbólico.

Pues tenemos  $f_u^2(x) \cong 2u - x - 2x^2$  (dejando sólo los términos de orden dos) y si hacemos  $y = 2x$ , obtenemos

$$f_{4u}(y) \approx 2f_u^2(y/2),$$

esto es, si  $N(\mu)$  es el número promedio de iteraciones en la región laminar de  $f_\mu$ , se observa que

$$N(\mu) \sim \frac{1}{2}N(\mu)$$

en la región laminar de  $f_\mu^2$ .

## 1.8. Lazo homoclínico $\Gamma$ ligados a un equilibrio del tipo Silla-foco.

Sea el siguiente campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\rho x - wy + f_{11}(x, z)x + f_{12}(x, y, z)y \\ \dot{y} = wx - \rho y + f_{21}(x, z)x + f_{22}(x, y, z)y \\ \dot{z} = \gamma y \end{cases} \quad (1.8.1)$$

cuyo linealizado alrededor del origen es,

$$\begin{cases} \dot{x} = -\rho x - wy \\ \dot{y} = wx - \rho y \\ \dot{z} = \gamma y \end{cases} \quad (1.8.2)$$



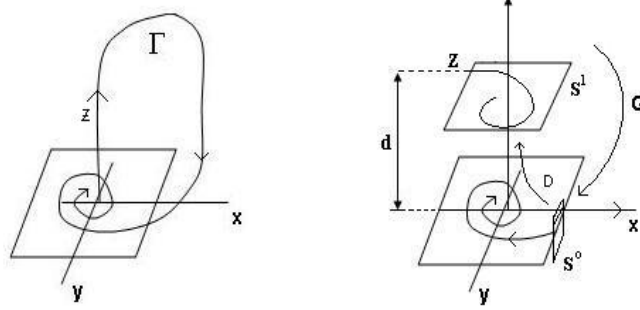


Figura 1.8: El mapeo de Poincaré para  $\Gamma$  en (1.8.1).

y asumimos que tiene una trayectoria homoclínica  $\Gamma$  como lo muestra la siguiente figura 1.8.

Para las secciones transversales  $S^0$  y  $S^1$  la transición local  $D : S^0 \rightarrow S^1$  se consigue por integración directa de (1.8.2):

$$\begin{cases} (x, y)(\tau) = \exp \left[ \begin{pmatrix} -\rho & -w \\ w & -\rho \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0(e^{-\rho\tau}) \\ y(\tau) = 0(e^{-\rho\tau}) \end{cases} \quad (1.8.3)$$

donde  $\tau = -\ln\left(\frac{y_0}{d}\right)$  es el tiempo de vuelo; el mapeo global  $G$  es un polinomio y la composición de este par de funciones  $\rho = G_0 D$  es el siguiente mapeo de Poincaré

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \left(\frac{y_0}{d}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} \cos(w) \ln\left(\frac{d}{y_0}\right) + o(y_0^\rho) \\ x_2 = x_0 \left(\frac{y_0}{d}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} \sin(w) \ln\left(\frac{d}{y_0}\right) + o(y_0^\rho). \end{cases} \quad (1.8.4)$$

Este mapeo se puede reducir, usando el teorema de la función implícita, al mapeo unidimensional siguiente:

$$\bar{y} = Ay^\rho \cos \left( w \ln \left( \frac{1}{y} \right) + \theta \right) + o(y^\rho) \quad (1.8.5)$$

cuya gráfica dependen de  $\rho$  obteniéndose: si  $\rho > 1$  (no es caótico) ó  $\rho < 0$  es una dinámica caótica, como se ilustra en la siguiente figura 1.9

En coordenadas polares el mapeo (1.8.5) es  $\bar{x} = \bar{\gamma} \cos(\bar{\varphi})$  y  $\bar{y} = \bar{\gamma} \sec(\bar{\varphi})$ , se transforma en  $\begin{cases} \bar{x} = |x| \left(\frac{y}{\delta}\right)^u \\ \bar{\varphi} = -\frac{w}{\gamma} \ln\left(\frac{y}{d}\right) + \varphi_0 \end{cases}$  con  $\varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x^+ > 0 \\ \pi & \text{si } x^+ < 0. \end{cases}$

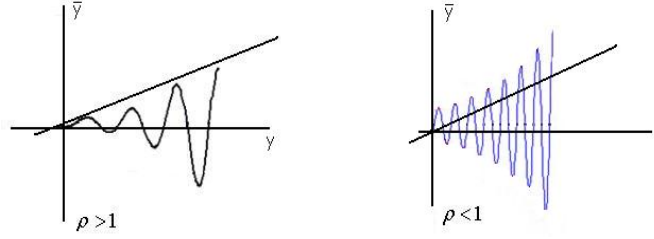


Figura 1.9: El orden y el caos en (1.8.5)

## 1.9. Histéresis (relacionada con la elasticidad)

Sea una ecuación de evolución como la siguiente,

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t), \ell) \quad (1.9.1)$$

con  $\ell = L(x)$  la curva que dá los equilibrios, esto es,  $F(x(t), L(x)) = 0$  para  $-\pi < x < \pi$ ; para lo cual consideramos, en principio, que es simétrica, esto es,  $F(x, \ell) = F(-x, \ell)$ .

En particular, para ciertos experimentos la fuerza de la gravedad crece afectándolo las fuerzas elásticas; y por ello se pierden las simetrías para  $\ell > \ell_c$ ,  $\ell_c$  valor crítico; originándose una ruptura en el diagrama de bifurcación. Lo cual se ilustra en la siguiente figura 1.10.

Por ejemplo para el sistema no autónomo originado a partir de la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon(\beta\dot{x} + \delta x + x^3 - x\cos(t)); \quad (1.9.2)$$

la cual es equivalente al siguiente sistema autónomo tridimensional,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\varepsilon(\beta\dot{x} + \delta x + x^3 - x\cos(t)) \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \quad (1.9.3)$$

observamos que evoluciona en dos tiempos; el tiempo rápido  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  y el tiempo lento  $T = \varepsilon\tau$ ; y la solución de (1.9.2) se puede expresar como una expansión para  $\varepsilon$  en término de estos dos tiempos así:

$$x(t) \cong x_0(t, T) + \varepsilon x_1(t, T) + \varepsilon^2 x_2(t, T) + \dots \quad (1.9.4)$$

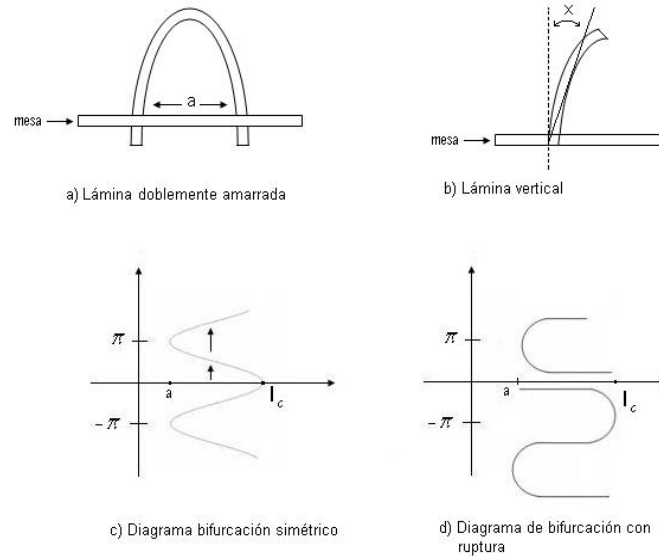


Figura 1.10: Una explicación de la histéresis

resulta que  $x_0(t) = A(T)e^{i\tau} + \bar{A}(T)e^{-i\tau}$ ; en el cálculo de  $x_1(\tau, T)$  aparece la explicación del fenómeno de “la histéresis”, dada por una condición de no resonancia entre el sistema interno (lado izquierdo de (1.9.2)) con respecto al sistema externo (lado derecho de la ecuación(1.9.2)).

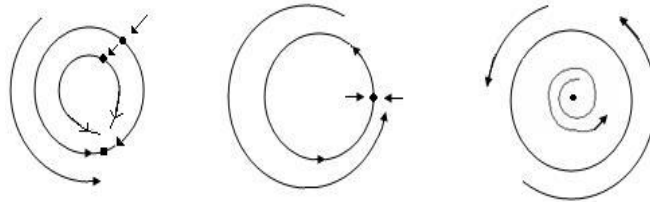


Figura 1.11: Histéresis explicada por la inestabilidad de órbitas periódicas y equilibrios inestables.

## 1.10. Teoría de los semiconductores de Ginzburg-Landau

La teoría básica de Landau afirma en que la penetración de fase  $\angle$  puede ser recordada como la que surge de una fase desordenada a partir de una

fase ordenada.

En un modelo tridimensional de sistemas magnéticos consiste en un arreglo de dipolos; si la temperatura  $T = 0$  todos los dipolos están alineados, si algunos dipolos se desalínean debido a la agitación térmica. Para describir este proceso definimos el parámetro  $\phi$ , como

$$\phi = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-} \quad (1.10.1)$$

donde  $n_+$  es el número de spins punteando hacia afuera,  $n_-$  es el número de spins punteando hacia adentro. En  $T = 0$ ,  $n_- = 0$  y  $\phi = 1$ ; si  $n_+ = 0$ , entonces  $\phi = -1$ ; cuando  $T$  crece,  $|\phi|$  decrece hacia un valor crítico  $T_c$ , como se ilustra en la siguiente figura 1.12 referente a la energía libre  $F$ :

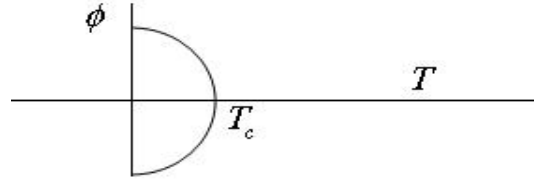


Figura 1.12: Variación típica de  $\phi(T)$ .

$$F = F_n + \alpha(T)\phi^2 + \frac{1}{2}\beta(T)\phi^4 \quad (1.10.2)$$

Con energía potencial  $f(\gamma)$  definida como dependiente de la función onda posición  $\Psi$ , es dada por:

$$f(\gamma) = f_n + \alpha|\Psi(\gamma)|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi(\gamma)|^4 + \frac{\hbar}{2m}|\nabla\Psi(\gamma)|^4 \quad (1.10.3)$$

De otro lado, para  $H_0$  un campo externo aplicado y  $J_e$  la supercorriente, tenemos:

$$\text{curl}(B\mu_0 B) = \nabla \times (B\mu_0 B) = \mu_0 J_e \quad (1.10.4)$$

Aún más, podemos extender en (1.10.3) los efectos del campo magnético a través del siguiente operador

$$\nabla \rightarrow \nabla \pm \frac{2ie}{\hbar}A \quad (1.10.5)$$

para obtener

$$f(\gamma) = f_n + \alpha |\Psi(\gamma)|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi(\gamma)|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\nabla - 2e\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{B^2}{2\mu} - \mu_0 \frac{H_0^2}{2} \quad (1.10.6)$$

Para el desplazamiento unidimensional, definimos la longitud fundamental  $\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}\right)^{\frac{1}{2}}$  y vemos que  $\xi(T)$  es la longitud coherente para las variaciones con respecto a  $\Psi$ ; en efecto la integral de (1.10.6) es la energía libre de Helmholtz dada por la siguiente relación:

$$F = \mathcal{U} - T \sum; \quad (1.10.7)$$

donde  $\mathcal{U}$  es la energía interna del superconductor en presencia de un campo magnético con:

$$du = Td \sum + H_0 \cdot dM. \quad (1.10.8)$$

Para obtener el estado estable a nivel de la temperatura  $T$  y campo  $H_0$ , minimizamos la llamada energía de Gibbs siguiente:

$$G(T, H_0) = \mathcal{U} - T \sum - H_0 \cdot M; \quad (1.10.9)$$

esto es, hay que minimizar a  $\int_V g(\gamma) d^3\gamma$  para  $B = \text{curl } A = \nabla \times A$ ; esto es

$$G(\Psi, A) = \int (f_n + \alpha |\Psi(\gamma)|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi(\gamma)|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\hbar\Delta - 2eA(\gamma))\Psi|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} - H_0 B + \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2) d\gamma, \quad (1.10.10)$$

como se sabe minimizamos en (1.10.10) usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (con  $\Psi$  es complejo, también es necesario minimizar con respecto a su conjugado  $\Psi^*$ ), obteniendo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \Psi^*} = \frac{\partial g}{\partial \Psi^*} - \sum_{\delta} \frac{\partial}{\partial x_5} \frac{\partial g}{\partial (\nabla_J \Psi^*)} = 0; \quad (1.10.11)$$

y de la identidad de Gauge resulta que (1.10.10) la divergencia  $(A) = 0$ , en

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - 2eA)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (1.10.12)$$

con condiciones de frontera apropiados para  $\Psi$  en una superficie apropiada, obtenemos la siguiente integral de superficie:

$$I_s = \int \delta\Psi^* \cdot \frac{\partial g}{\partial(\nabla\Psi^*)} \cdot \eta ds \quad (1.10.13)$$

y por ello,

$$\eta \cdot \frac{\partial g}{\partial(\nabla\Psi^*)} = 0 \Leftrightarrow \eta \cdot (-i\hbar\nabla - 2eA)\Psi = 0.$$

De otro lado, minimizando (1.10.10) con respecto  $A$ , tenemos:

$$\frac{\partial g}{\partial A_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial(\partial A_i / \partial x_j)} = 0; \quad (1.10.14)$$

para este cálculo usamos  $H_0 \cdot B = H \operatorname{curl} A$ , esto es,  $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{curl} (\operatorname{curl} A) \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0} \operatorname{curl} B$ ; y  $J_e$ . Entonces de (1.10.14) por las ecuaciones de Maxwell resulta que:

$$J_e = -\frac{-e\hbar}{m}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{4e^2}{m} \Psi^* \Psi A, \quad (1.10.15)$$

conocida como la expresión local de la ecuación de London.

Ahora obtenemos para el campo crítico  $H_{cb}$  para el superconductor, si dentro del sistema las dimensiones del ambiente es mayor que  $\lambda$ ,  $\beta = 0$ , y  $\Psi$  constante obtenemos:

$$|\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{\beta}. \quad (1.10.16)$$

Entonces la ecuación de London vista en (1.10.15) se convierte en:

$$J_e = -\frac{4e^2}{m} \frac{|\alpha|}{\beta} A \quad (1.10.17)$$

de la cual se deduce una profundidad de penetración de

$$\lambda = \left( \frac{m\beta}{4e^2\mu_0|\alpha|} \right), \quad (1.10.18)$$

y también se observa que  $\lambda$  proporcional a  $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ .

Entonces para un volumen dado  $V$ , de (1.10.10) obtenemos:

$$\begin{cases} G_s = v(f_n - \frac{|\alpha|^2}{2\beta} + \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2), & \text{en fase supercrítica} \\ G_n = v f_n, & \text{en fase normal.} \end{cases} \quad (1.10.19)$$

## 22 Conceptos preliminares

---

De  $G_s = G_n$  obtenemos el siguiente campo crítico:

$$H_{cb}^2 = \frac{|\alpha|^2}{\mu_0 \beta}. \quad (1.10.20)$$

En resumen obtenemos la siguiente ecuación diferencial de Ginzburg-Landau, GL, con condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = n - (1 + iR)|\Psi|^2 \Psi + (1 + iR) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0, \ell; \end{cases} \quad (1.10.21)$$

cuya solución es  $\tilde{\Psi}(t) = \exp\{-ir(t - t_0)\}$  para un  $t_0$  arbitrario.

Luego linealizamos (1.10.21) alrededor de una solución periódica  $\Psi(t)$  para obtener:

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} = \tilde{\Psi} - (1 + iR)(2\tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi}^*) + (1 + ib) \frac{\partial \tilde{\Psi}^2}{\partial x^2}; \quad (1.10.22)$$

donde (1.10.22) se soluciona usando

$$\tilde{\Psi}(x, t) = \tilde{\Psi}(t) f(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10.23)$$

encontramos a  $f$  y decimos que si  $b < 0$ ,  $\tilde{\Psi}$  es linealmente estable para  $R < R_c$ , donde

$$R_c = -\{1 + (1 + b^2)\pi^2/2\ell^2\}/b. \quad (1.10.24)$$

### 1.11. Modelo experimental del efecto Josephson

En [Fey] se apela a la teoría de Ginzburg-Landau de la superconductividad. Así los dos superconductores  $\phi(t) = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi(t)}$ ; donde  $\rho_1, \rho_2$  son las densidades de los respectivos pares de Cooper;  $\phi_1, \phi_2$  son las fases relativas de sus funciones de ondas. El experimento de Josephson entre los dos superconductores se colocó una película delgada.

Sea  $\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ , y  $J_c = \frac{2k}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2}$ , la corriente crítica a través de la unión de Josephson; entonces las ecuaciones básicas del efecto Josephson forman el siguiente sistema:

$$\begin{cases} I(t) = I_c \sin \phi \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}; \end{cases} \quad (1.11.1)$$

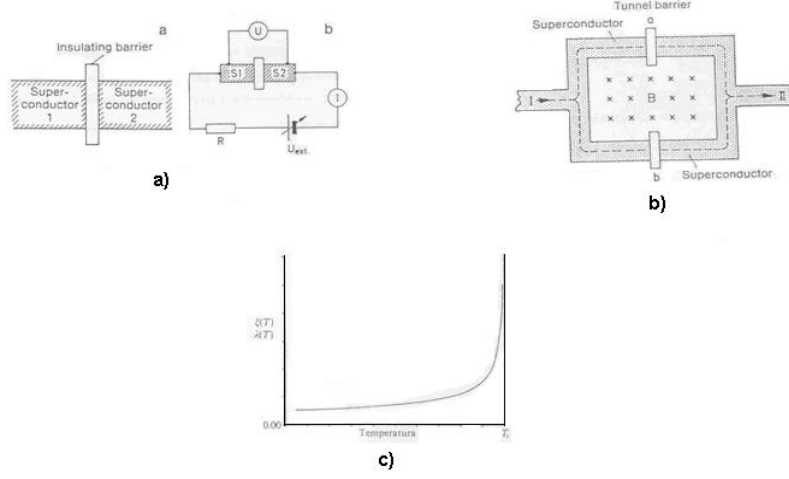


Figura 1.13: a) Arreglo esquemático para la medición del efecto Josephson en una junta o unión. b) Diagrama esquemático de dos juntas en paralelo. c) Comportamiento de la longitud de penetración  $\lambda$  con la temperatura según la teoría de Ginzburg-Landau.

La cual se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = U_1 \phi_1 + K \phi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = U_2 \phi_2 + K \phi_1 \end{cases} \quad (1.11.2)$$

donde  $U_1 - U_2 = qV$ , observe que (1.11.2) corresponde al Hamiltoniano  $H = \begin{pmatrix} \frac{qv}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{qv}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $K = k(T)$  corresponde a un parámetro de la correlación entre creación-destrucción de pares Cooper. Por que cuando un metal se hace super conductor al vencer la fuerza de coulomb transformando el par electrón-fotón en un par electrón-electrón.

Integrando la segunda ecuación de (1.11.1) y reemplazando en la primera, se obtiene

$$I = I_0 \sin \left[ \left( \frac{2eV}{\hbar} \right) + \phi_0 \right] \quad (1.11.3)$$

En el evento de un voltage inducido a través de la unión por un campo magnético es  $v(t) = v_0 + v_1 \cos(\omega t)$ , entonces (1.11.3) se convierte en:



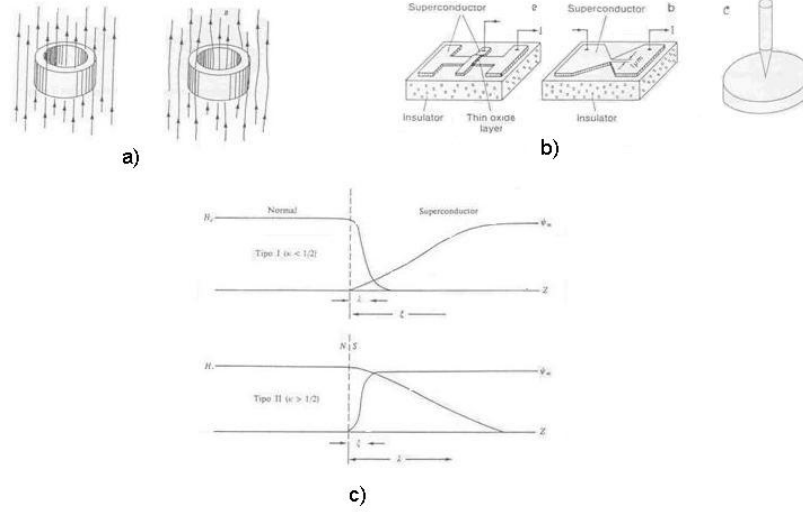


Figura 1.14: a) Los efectos de campos magnéticos. b) Tipos de uniones de Josephson: contacto túnel, micropuente, punta de contacto. c) Comportamiento de la longitud coherente y de la longitud de penetración en la transición de una zona del material en estado normal a una zona superconductora para superconductores del tipo I y de tipo II.

$$I(t) = I_0 \sin \left( \frac{2eV_0}{\hbar} + \frac{2eV_1}{\hbar\omega_0} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ J_n \left( \frac{2eV}{\hbar\omega} \sin \left[ \left( m\omega_0 \frac{2eV}{\hbar} \right) t + \phi_0 \right] \right) \right\}, \quad (1.11.4)$$

donde  $J_n$  es la función de Bessel de orden  $n$ . Cuando  $n\hbar\omega_0 = -2ev_0$ , entonces  $I(t)$  en (1.11.4) es  $J_{dc} = (-1)^n J_1 J_n(2ev_0/\hbar\omega_0) \sin\phi_0$  para los picos  $n\hbar\omega_0/2e$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) de corriente directa.

Si en el proceso de junction de Josephson hay cargas externas (bios), se puede inducir radiación o “ruidos aleatorios”, los cuales pueden generar la curva característica  $I - V$  como la mostrada en la siguiente figura 1.18:

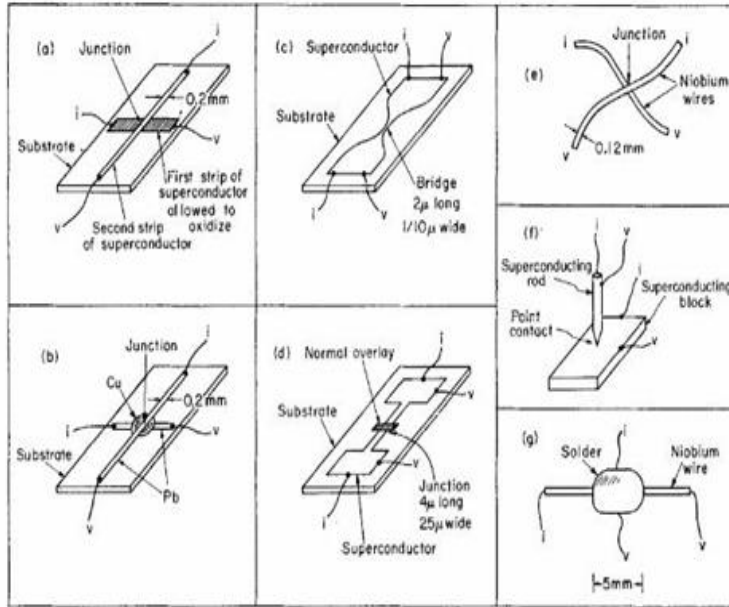


Figura 1.15: *Diversos montajes experimentales de uniones Josephson.*

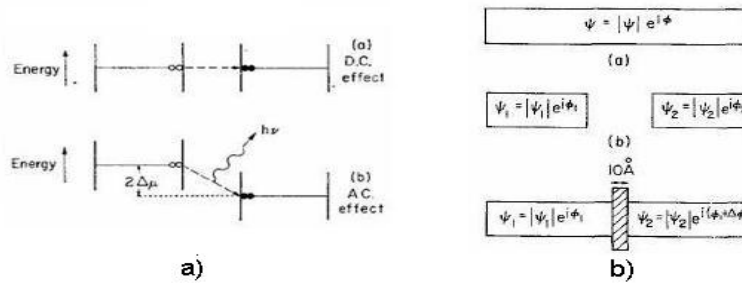


Figura 1.16: a) *El efecto produce una corriente directa (dc) cuando el par de cooper atraviesa la barrera (gráfica arriba); o si hay una diferencia de potencial química entre la barrera, el tunelamiento es acompañado de una emisión de fotones con energía  $h\nu = 2\Delta_\mu$  (gráfica de abajo) donde la energía gap  $\Delta_\mu$  es  $\Delta_\mu = ev$ .* b) *Relaciones entre las fases de los superconductores.*

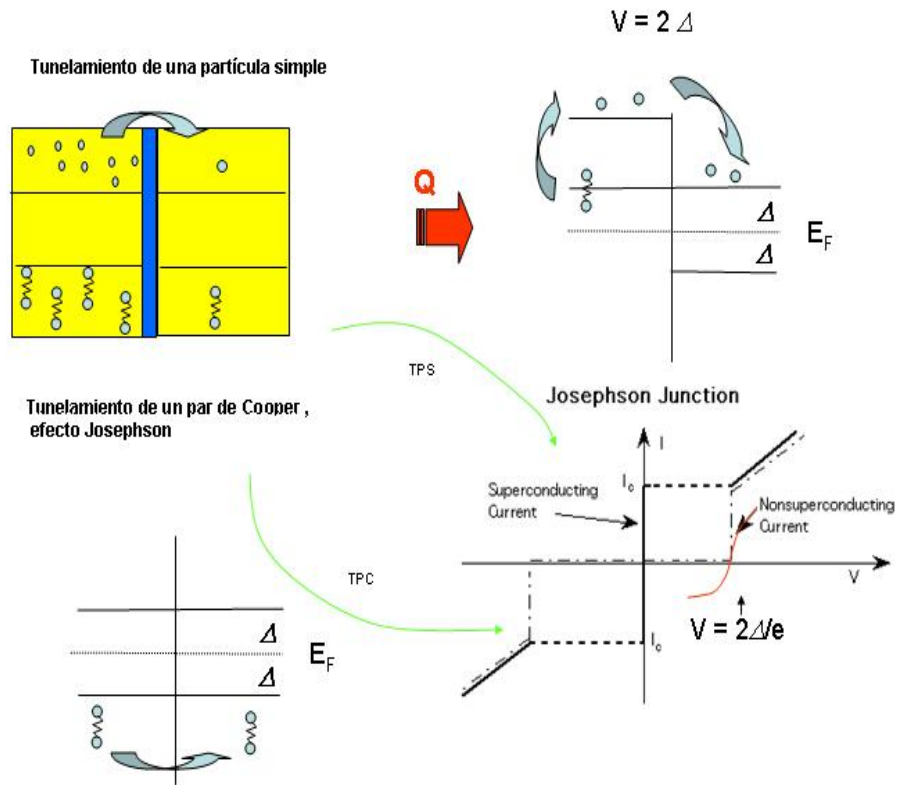


Figura 1.17: *La electrodinámica de los pares de Cooper.*

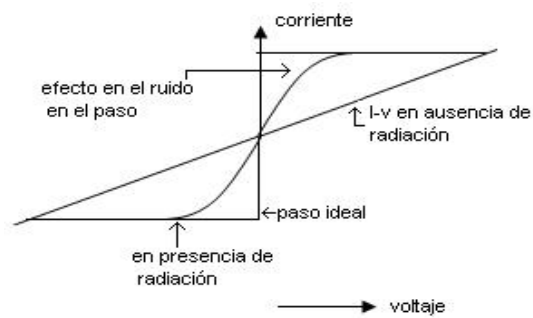


Figura 1.18: *Esquema que la curva característica  $I - v$  afectada por bias débiles.*

## CAPÍTULO 2

---

### La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

#### 2.1. Descripción del modelo

La unión de Josephson es un modelo experimental de la superconducción capaces de generar voltajes de extraordinaria alta frecuencia, entre  $10^1$  y  $10^{11}$  ciclos por segundo. Este modelo experimental tiene muchas aplicaciones tecnológicas: en amplificadores, estándares para voltaje, mezcladores, interferómetros y circuitos digitales.

La unión de Josephson puede detectar potenciales tan pequeños como cuadrillón de un voltio y esto ha sido usado para detectar radiaciones infrarrojos de galaxia distantes.

El fenómeno de unión de Josephson es explicado a través de la mecánica cuántica, cuya dinámica es no lineal porque de alguna manera la ecuación que lo gobierna es la misma que la del péndulo. Primero explicaremos la dinámica de una unión amortiguada en el límite, y más tarde uniones subamortiguadas y acopladas.

#### 2.2. Fundamentos físicos

La unión de Josephson consiste de dos superconductores separados por una película delgada; esta última puede ser un aislador, un metal normal,

## 28 La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

un semiconductor. Los dos superconductores pueden ser caracterizados por las dos funciones de ondas  $\psi_1 e^{i\theta_1}$ ,  $\psi_2 e^{i\theta_2}$ , respectivamente; en estados altos de superconducción sus electrones forman pares de Cooper, descritos por una única y microscópica función de onda; esto implica un alto grado de coherencia entre los electrones, los pares adoptan la misma fase para minimizar la energía del superconductor.

En 1922 Brian Josephson advirtió sobre la posibilidad de que se pasará corriente entre superconductores, aún sin diferencia de voltaje entre ellos. Este comportamiento es imposible clásicamente, podría ocurrir por el tunelamiento de los pares Cooper a través de la unión; la observación experimental fue inicialmente hecha por Anderson y Rowell en 1963. [K.L]

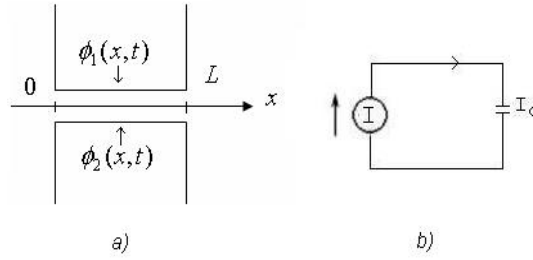


Figura 2.1: a) La diferencia de fase  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ . b) Corriente de la unión Josephson

### 2.3. Relaciones de Josephson

Supongamos que una unión de Josephson es conectada a una fuente de corriente continua, así que una corriente  $I(t) > 0$  se está moviendo a través de la unión. Usando mecánica cuántica, se puede mostrar que esta corriente es menor que una cierta corriente crítica  $I_c$ , puede desarrollarse a través de esta unión, la unión funciona como una resistencia cero. Sin embargo, las fases entre los dos superconductores viajarán independientemente con una diferencia de fase  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ , donde  $\phi$  satisface la relación de Josephson, como se ilustra en la figura 2.1:

$$I(t) = I_c \sin \phi(t) \quad (2.3.1)$$

La ecuación (2.3.1) implica que la diferencia de fase crece cuando la corriente externa  $I$  crece. Cuando  $I$  sobrepasa a  $I_c$ , la diferencia de fase no se puede mantener constante y un voltaje se desarrolla a través de la unión. La

## 2.4 Equivalencia entre un circuito del fenómeno de la unión de Josephson y la ecuación del péndulo 29

diferencia de fase en los superconductores crece rápidamente, con una rata de crecimiento gobernada por la relación fase-voltaje de la Josephson siguiente

$$v(t) = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}, \quad (2.3.2)$$

donde  $v(t)$  es el voltaje a través de la unión,  $\hbar$  es la constante de Plank, y  $e$  es la carga del electrón; para la obtención de (2.3.2) ver [Fey].

### 2.4. Equivalencia entre un circuito del fenómeno de la unión de Josephson y la ecuación del péndulo

La relación (2.3.1) se aplica sólo a la corriente de pares de electrones. En general la corriente que pasa a través de esta unión tiene componentes de una corriente de desplazamiento y una corriente ordinaria; representando la corriente de desplazamiento por un capacitador, y la corriente ordinaria por un resistor, logrando aun circuito equivalente mostrado en la figura 2.2 en la cual aplicamos las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff;

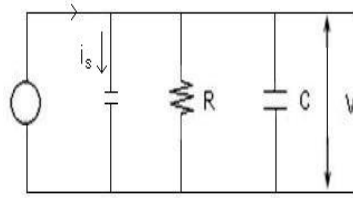


Figura 2.2: *Circuito de Josephson donde  $i_s = i_c \sin(\phi)$*

para este circuito en paralelo los voltajes en cada parte tienen que ser iguales a  $v$ , el voltaje a través de la unión; la corriente a través del capacitor igual a  $c\dot{v}$  y la corriente a través del resistor  $\frac{v}{R}$ . La suma de la corriente y la supercorriente  $I \sin \phi$  es igual a la corriente externa  $\gamma$ :

$$c\dot{v} + \frac{v}{R} + I_c \sin \phi = \gamma \quad (2.4.1)$$

La ecuación (2.4.1) se puede escribir en términos de la fase de (2.3.2)  $\phi(t)$ , el resultado es:

$$\frac{\hbar c}{2e} \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + I_c \sin \phi = \gamma \quad (2.4.2)$$

### 30 La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

ecuación que es precisamente análoga a la ecuación siguiente a cual gobierna el péndulo amortiguado por una constante de torque  $\Gamma$ :

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL \sin \theta = \Gamma \quad (2.4.3)$$

Aquí las analogías son como sigue:

péndulo	unión de Josephson
ángulo $\theta$	diferencia de fase $\phi$
velocidad angular $\dot{\theta}$	voltaje $\frac{\hbar}{2e}\phi$
masa $m$	capacitancia $c$
torque aplicado $\Gamma$	corriente externa $\gamma$
constante de amortiguamiento $b$	conductancia $\frac{1}{R}$
máximo torque gravitacional $mgL$	corriente crítica $I$
desplazamiento horizontal $x = mgL \sin \theta$	corriente de tunelamiento del par de electrones $I = I_c \sin \phi$

Esta analogía es muy útil para la visualización de la dinámica de la unión de Josephson; [Su, Zi] construyeron este mecanismo análogo, y midieron de rotación promedio del péndulo como una función de torque aplicado; esto es el análogo a la curva característica  $(I - v)$ , curva de corriente-voltaje promedio, la cual se obtiene en la unión de Josephson.

#### 2.5. Valores Típicos de los Parámetros

Antes de analizar (2.4.2) mencionamos los valores típicos de la unión de Josephson. El rango de la corriente crítica  $I_c \in [1\mu A - amA]$ , y el voltaje típico es  $I_c R \cong 1mv$ . Como  $\frac{2e}{\hbar} \simeq 4,83 \times 10^4 hz/v$ , la frecuencia típica es del orden  $10^{11} Hz$ . Finalmente la longitud de la escala típica para la unión de Josephson es aproximadamente  $1\mu m$ , pero esta depende de la geometría y tipo de acoplamiento usado.

Así podemos expresar a (2.4.2) en términos adimensionales tomamos el tiempo adimensional como

$$\tau = \frac{2eI_c R}{\hbar} \cdot t \quad (2.5.1)$$

obtenemos la ecuación

$$\beta\phi'' + \phi' + \sin \phi = \frac{\gamma}{I_c} \quad (2.5.2)$$

donde  $\phi' = \frac{d\phi}{d\tau}$  y  $\beta = \frac{2eI_c R}{\hbar}$

es el parámetro de McCumler. Dependiendo del tamaño, la geometría y el tipo de acoplamiento usado en la unión de Josephson  $\beta \in [10^{-6}, 10^6]$ . Para el caso del límite de sobreamortiguamiento,  $\beta \ll 1$ , caso para el cual  $\beta\phi''$  puede ser ignorado en un primer intento, así el sistema (2.5.2) se reduce a

$$\phi' = \frac{\gamma}{I_c} - \sin \phi \quad (2.5.3)$$

y veremos que este último sistema tiende hacia un punto fijo estable cuando  $\gamma < I_c$ , y cambia hacia una solución periódica cuando  $\gamma > I_c$ ; conviene ubicar los retratos de fase de (2.5.3) en el círculo  $S^1$ . Ver figura 2.5.3

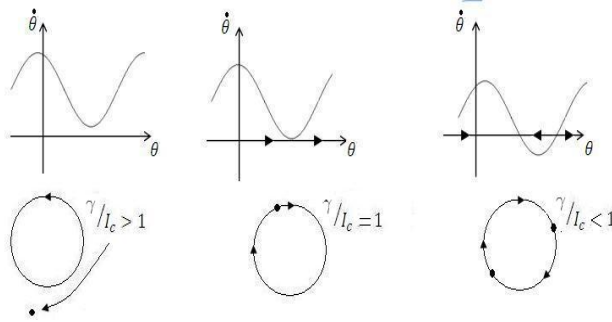


Figura 2.3: Retratos de fases de la ecuación 2.5.3

De la analogía entre el péndulo con la unión de Josephson tenemos que el desplazamiento horizontal del péndulo corresponde a la corriente de tunelamiento a través de la unión; así que cuando existe un cambio de voltaje a través de la unión debido a una corriente directa, la corriente alterna del tunelamiento regresa y avanza a través del tunelamiento; la frecuencia  $v$  de esta corriente alterna es igual a  $\frac{\hbar}{2e} < \frac{d\theta}{dt} >$  correspondiente a la frecuencia de  $\frac{1}{2\pi} < \frac{d\theta}{dt} >$  del péndulo, éste último es el promedio de las velocidades angulares para los ciclos una vez alcanzado el torque crítico.

Observe que  $\frac{d}{dt}\phi(t)$  tiene el mismo signo pero no es constante, así que el voltaje  $v(t)$  a través de la unión contiene las componentes de corriente alterna y corriente continua, pero el promedio  $< \frac{d\phi(t)}{dt} >$  de la razón de cambio de fase a través de la unión permanece igual a la siguiente expresión,

$$< \frac{d\phi}{dt} > = \frac{2e}{\hbar} < v > = \frac{2e}{\hbar} v_{dc}$$

porque la corriente directa es el promedio con respecto al tiempo del voltaje. La corriente continua del efecto Josephson puede ser observada a



## 32 La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

través de la componente continua del voltaje, la cual se puede detectar por instrumentos y puede causar radiación con frecuencia  $v$  dada por  $hv = 2ev_{dc}$ ; frecuencia que coincide con la frecuencia de emisión de fotones por radiación electromagnética. La potencia de salida del efecto Josephson puede ser muy pequeña, pero su utilidad esta en que su frecuencia puede cuidadosamente controlada ajustando el voltaje a través de unión; así este montaje es un sensible detector de radiación.

### 2.6. Valor del voltaje promedio $\langle v \rangle$ como función de la corriente $I$ , en el caso superamortiguado.

Como

$$\langle v \rangle = \frac{\hbar}{2e} \langle \dot{\phi} \rangle$$

tenemos que

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} \right\rangle = \frac{2eI_c R}{\hbar} \langle \phi' \rangle$$

implica  $\langle v \rangle = I_c R \langle \phi' \rangle$ .

Hay dos casos a considerar, cuando  $\gamma \leq I_c$ , todas las soluciones de (2.5.3) se aproximan a un punto fijo  $\phi^* = \sin^{-1}(\frac{\gamma}{I_c})$ , donde  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi^* \leq \frac{\pi}{2}$ . Así  $\phi' = 0$  corresponde a un estado de reposo, y así  $\langle v \rangle = 0$  para  $\gamma \leq I_c$ . El otro caso ocurre cuando  $\gamma \geq I_c$ , implica que todas las soluciones son periódicas con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{\gamma}{I_c})^2 - 1}} \quad (2.6.1)$$

computamos  $\langle \phi' \rangle$  tomando el promedio de la derivada con respecto al tiempo en un ciclo, y tenemos:

$$\langle \phi' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\phi}{d\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T d\phi = \frac{2\pi}{T} \quad (2.6.2)$$

De (2.6.1)-(2.6.2) obtenemos  $\langle v \rangle = I_c R \sqrt{(\frac{\gamma}{I_c})^2 - 1}$  para  $\gamma > I_c$  En resumen

$$\langle v \rangle = \begin{cases} 0 & \text{para } \gamma \leq I_c \\ I_c R \sqrt{(\gamma/I_c)^2 - 1} & \text{para } \gamma > I_c, \end{cases} \quad (2.6.3)$$

## 2.6 Valor del voltaje promedio $\langle v \rangle$ como función de la corriente $I$ , en el caso superamortiguado. 33

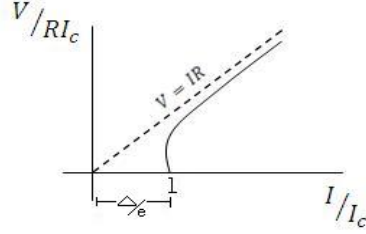


Figura 2.4: La curva  $V - I$  en el caso superamortiguado ( $\beta = 0$ ) donde  $\Delta$  es la energía gap.

como se muestra en la siguiente figura 2.4. Si se recupera  $I$ , el ciclo límite persiste para valores por debajo de  $I = 1$ , pero su frecuencia tiende a cero cuando  $I \rightarrow I_c$ , más exactamente cuando  $[\ln(I - I_c)]^{-1} \rightarrow 0$ .

Cuando  $I$  crece, el voltaje permanece cero hasta  $I > I_c$ ; entonces  $\langle v \rangle$  crece repentinamente y eventualmente es asintóticamente al comportamiento óhmico  $\langle v \rangle = IR$  para  $I \gg I_c$ .

El fenómeno es mucho más interesante si  $\beta$  no es despreciable, en particular la curva característica  $I - v$  puede reflejar un fenómeno llamado “histéresis”, como se muestra en la siguiente figura 2.5

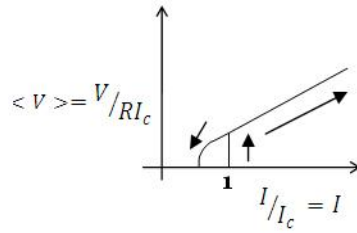


Figura 2.5: La curva  $V - I$  cuando  $\beta > 0$ , fenómeno denominado histéresis.

Si decrece el valor de  $I$  el voltaje no regresa a cero en  $I_c$ ; esto porque cuando  $\beta \neq 0$  el sistema tiene inercia. En efecto, por la analogía con el péndulo, la corriente crítica es análoga al torque crítico  $\Gamma_c$  debido a la energía que guarda en este proceso, de rotación continua.

En términos matemáticos este fenómeno ocurre porque un equilibrio estable coexiste con una solución periódica estable, fenómeno que ocurre en

## 34 La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

sistemas bidimensionales. Cerca de  $I_c$  aparentemente hay un salto de  $\langle v \rangle$  hacia cero, porque  $[\ln(I - I_c)^{-1}]$  tiene derivada de todos los ordenes en  $I = I_c$ .

### 2.7. Histéresis en la unión de Josephson

En esta sección nosotros estudiamos la dinámica del movimiento del péndulo amortiguado con un torque constante; esto es equivalente en alta tecnología, a la actividad de la superconducción debida a la unión de Josephson producida por una corriente constante.

Como en el péndulo débilmente amortiguado, por la débil conductancia en el modelo de Josephson existe un efecto de histéresis gracias a la coexistencia de un ciclo límite estable y un punto fijo estable. En términos físicos el péndulo puede coincidir con una trayectoria rotacional alrededor de su parte más alta, con un apropiado estado de reposo donde la gravedad balancea el torque aplicado. El estado final depende de las condiciones iniciales y nuestros objetivos es entender.

Cómo ocurre esta biestabilidad como se dijo la ecuación que gobierna el movimiento del efecto Josephson es la siguiente:

$$\frac{\hbar c}{2e} \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + I_c \sin \phi = \gamma \quad (2.7.1)$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck dividida por  $2\pi$ ,  $e$  es la carga del electrón,  $\gamma$  es la corriente externa;  $c$  y  $I_c$  son la capacitancia de la unión, su resistencia y corriente crítica; y  $\phi(t)$  es la diferencia de fase a través de unión.

Para efectos de dar relevancia al rol de la unión se adimensional la ecuación (2.7.1) a través de los siguientes cambios:

$$\tilde{t} = \left( \frac{2eI_c}{\hbar c} \right)^{1/2} .t, \quad \gamma = \frac{I_B}{I_c}, \quad \alpha = \left( \frac{\hbar}{2eI_c R^2 c} \right)^{1/2} \quad (2.7.2)$$

para obtener

$$\phi'' + \alpha \phi' + \sin \phi = \gamma \quad (2.7.3)$$

donde  $\alpha$  e  $\gamma$  son la constancia de amortiguamiento y corrientes amortiguadas, respectivamente; las derivadas son con respecto a  $\tilde{t}$ ; podemos escoger, sin pérdida de generalidad,  $\alpha > 0$  y  $I \geq 0$  (de otra manera redefinimos  $\phi$  como  $-\phi$ ). En (2.7.3) hacemos  $y = \phi'$  y obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \phi' = y \\ y' = \gamma - \sin \phi - \alpha y \end{cases} \quad (2.7.4)$$

con espacio de fases un cilindro; puesto que  $\phi \in S^1$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

### 2.7.1. La cantidad y cualidad de los equilibrios

Los equilibrios de (2.7.4) satisfacen

$$\begin{cases} y^* = 0 \\ \sin \phi^* = \gamma \end{cases} \quad (2.7.5)$$

luego hay dos puntos fijos si  $\gamma < 1$  y ninguno si  $\gamma > 1$ . Cuando hay puntos de equilibrio, uno es una silla y el otro es un sumidero, puesto que el jacobiano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \phi^* & -\alpha \end{pmatrix} \quad (2.7.6)$$

tiene traza  $A = \tau = \lambda_1 + \lambda_2 =$  suma de valores propios  $= -\alpha < 0$ , y  $\det(A) = \cos \phi^* = \pm \sqrt{1 - \gamma^2}$ . Cuando el discriminante  $\Delta > 0$ , tenemos un nodo estable si  $\tau^2 - 4\Delta = \alpha^2 - 4\sqrt{1 - \gamma^2} > 0$ , si el amortiguamiento es suficientemente fuerte o si  $\gamma$  próximo a 1; de otra manera el sumidero es una espiral estable. En  $\gamma = 1$  el nodo estable y la silla colapsan en una bifurcación para el equilibrio del tipo silla-nodo.

### 2.7.2. Existencia de Órbitas Periódicas

Qué se espera cuando  $\gamma > 1$ ?. No hay equilibrios y veamos que surge una órbita periódica. Siguiendo las ideas de Poincaré veamos primero que la órbita periódica existe, en efecto cuando  $y' = 0$  tenemos la siguiente ceroclina

$$y = \alpha^{-1}(\gamma - \sin \phi) \quad (2.7.7)$$

y el flujo baja en la parte de arriba y sube en la parte de abajo, como lo muestra la siguiente figura 2.6

En particular, todas las trayectorias que eventualmente entran en la franja  $y_1 \leq y \leq y_2$  (como lo muestra la figura anterior) permanecen en ella todo el tiempo posterior, (aquí  $y_1$  y  $y_2$  son números fijos tales que  $0 < y_1 < (\gamma - 1)/\alpha$  y  $y_2 > (\gamma + 1)/\alpha$ . Dentro de la franja el flujo siempre se dirige hacia la derecha, porque  $y > 0$  implica  $\phi' > 0$ .

### 36 La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

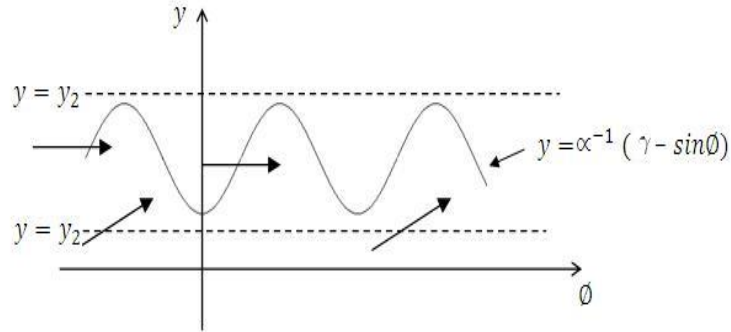


Figura 2.6: *Existencia de una órbita periódica*

Como  $\phi = 0$  y  $\phi = 2\pi$  son equivalentes sobre el cilindro, nosotros dirigimos nuestra atención a la franja rectangular  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $y_1 \leq y \leq y_2$ ; esta franja contiene toda la información del comportamiento del flujo.

Ahora consideremos una trayectoria que comienza en la parte alta de “y” sobre el lado izquierdo de la caja, y sigamosla hasta que intercepte el lado izquierdo de la caja en un punto “P(y)”, se obtiene la aplicación

$$y \longrightarrow P(y) \quad (2.7.8)$$

La cual se denomina mapeo de Poincaré; y observemos cómo se ubica “P(y)” después de una vuelta alrededor del cilindro, como se muestra en la siguiente figura. El mapeo de Poincaré es también llamado “mapeo del primer retorno”, porque si una trayectoria comienza a una altura “y” sobre la línea  $\phi \equiv 0 \pmod{2\pi}$  entonces “P(y)” es su altura cuando retorna a esta línea.

Ahora veamos que existe un punto  $y^*$  tal que  $P(y^*) = y^*$ , la cual corresponde a una órbita cerrada; para ello veamos que una trayectoria que comienza en  $y = y_1$  en  $\phi = 0$  satisface la relación

$$P(y_1) > y_1$$

, esto porque en este caso el campo vectorial asociado con (2.7.4) apunta estrictamente hacia arriba y nunca retorna a  $y = y_1$ ; con el mismo argumento se prueba que

$$P(y_2) > y_2,$$

y “ $P(y)$ ” es una función continua (lo cual sigue de la continuidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales y de la dependencia continua para soluciones diferenciales); “ $P(y)$ ” es una función monótona porque si no lo fuera las trayectorias del campo diferencial deberían cortarse. Por lo anterior  $P(y)$  tiene una gráfica como la siguiente figura 2.7

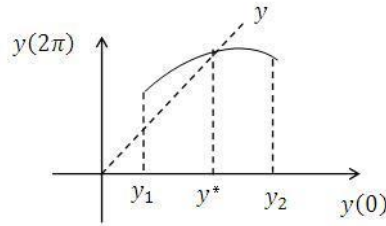


Figura 2.7: Mapeo de Poincaré para el sistema (2.7.4) cuando  $\gamma > 1$ .

Por el teorema del valor intermedio,  $P(y)$  corta la diagonal; esto es, existe un  $y^*$  tal que  $P(y^*) = y^*$ ;  $y^*$  es una condición inicial que corresponde a una órbita periódica.

### 2.7.3. Unicidad de la órbita periódica

Clasificamos las órbitas periódicas en  $\mathbb{R} \times S^1$  como “libres” o “rotativos”, según la siguiente figura 2.8:

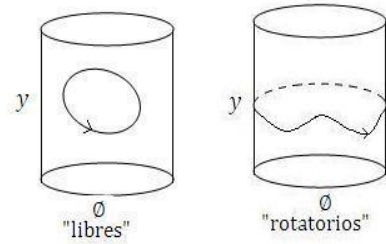


Figura 2.8: Órbitas periódicas en el cilindro  $\mathbb{R} \times S^1$

Para  $\gamma > 1$ , las órbitas periódicas “libres” son imposibles en este caso pues encerrarían un punto fijo (teorema de Poincaré Bendixson). Ahora supongamos dos órbitas periódicas rotatorias diferentes, el retrato de fases sería como la segunda figura 2.8.

Una de las rotaciones debe estar estrictamente arriba de la otra porque las trayectorias no se pueden cortar. Sean  $y_2(\phi) > y_1(\phi)$  para todo  $\phi$ .

### 38 La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

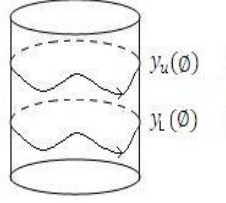


Figura 2.9: *Imposibilidad de dos órbitas periódicas*

La existencia de tales dos órbitas periódicas rotatorias conducen a una contradicción, como muestra el siguiente argumento con base en la siguiente función de conservación de energía:

$$E(y, \phi) = \frac{1}{2}y^2 - \cos \phi \quad (2.7.9)$$

Después de circular alrededor de una órbita periódica del tipo rotativo, el cambio en la energía  $\Delta E$  tiene que acumularse, esto es:

$$0 = \Delta E = \int_0^{2\pi} \frac{dE}{d\phi} d\phi \quad (2.7.10)$$

pero (2.7.7) implica que

$$\frac{dE}{d\phi} = y \frac{dy}{d\phi} + \sin \phi \quad (2.7.11)$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{y'}{\phi'} = \frac{\gamma - \phi - \alpha y}{y} \quad (2.7.12)$$

Sustituyendo (2.7.12) en (2.7.11) resulta  $\frac{dE}{d\phi} = \gamma - \alpha y$ . Así que (2.7.9) implica

$$0 = \int_0^{2\pi} (\gamma - \alpha y) d\phi$$

Sobre cualquier rotación  $y(\phi)$ . Equivalentemente, cualquier rotación debe satisfacer

$$0 = \int_0^{2\pi} y(\phi) \cdot d\phi = \frac{2\pi\gamma}{\alpha} \quad (2.7.13)$$

pero puesto que  $y_u(\phi) > y_l(\phi)$ , entonces

$$\int_0^{2\pi} y_u(\phi) d\phi > \int_0^{2\pi} y_l(\phi) dy.$$

Por ello (2.7.13) no se puede tener para ambas rotaciones. Esta contradicción prueba que la rotación para  $\gamma > 1$  es única.

#### 2.7.4. Conexiones heteroclínicas

Surgen conexiones heteroclínicas las cuales conectan dos equilibrios (también soluciones homoclínicas que autoconectan un equilibrio) en los casos que se ilustran en la figura 2.10.

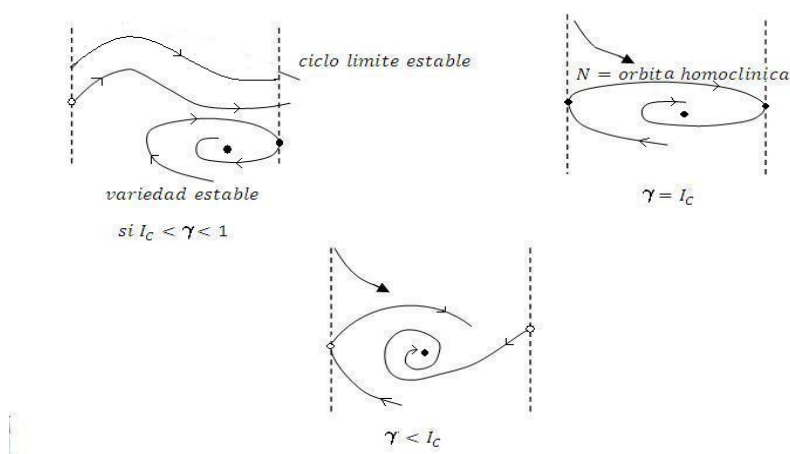


Figura 2.10: conexiones heteroclínicas

El resumen de esta familia de los retratos de fases que aquí pueden surgir se resumen en el siguiente gráfico de bifurcaciones ilustrado en la figura 2.11

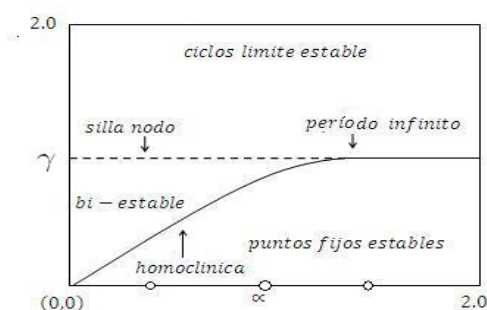


Figura 2.11: Diagrama de Bifurcaciones



## 40 La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

Por la analogía en el fenómeno de unión de Josephson y sistema pendular amortiguado,  $b > 0$ , tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \sin \theta = 0 \quad (2.7.14)$$

y torciendo el cilindro en  $y = 0$ , podemos representar la evolución de las trayectorias en la siguiente figura 2.12

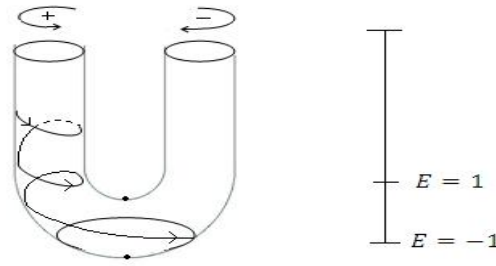


Figura 2.12: Retrato de fases para el sistema correspondiente a la ecuación 2.7.14 y los niveles de energía.

De (2.7.14) podemos calcular el cambio de energía a lo largo de las trayectorias mediante el siguiente cálculo:

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos \theta \right) = \dot{\theta}(\ddot{\theta} + \sin \theta) = -b\dot{\theta}^2 < 0; \quad (2.7.15)$$

Esto es, la energía decrece monótonamente a lo largo de las trayectorias heteroclínicas de (2.7.13), excepto en los equilibrios.

### 2.8. El modelo espacio-temporal de tunelamiento superconductor.

A continuación generalizamos para una dimensión espacial la creación úntual (2.4.2).

Sea  $\psi(\vec{r}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$  la función de onda de un par de electrones con momento  $\hbar\vec{k}$ . El flujo a través del esquema superconductor separado por la película delgada, depende de cómo la función de onda defiere entre sus lados derecho e izquierdo. Si  $\phi$  es la diferencia de fase, la fórmula para la densidad de corriente es  $I = I_C \sin \phi$ , donde  $I_c$  es la densidad de corriente crítica.

Si aplicamos un campo eléctrico o magnético a este montaje, la cual asumimos en el plano  $x - y$ , se expresa por la conjugación de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2ed}{\hbar c} H_y \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2ed}{\hbar c} H_x \end{cases} \quad (2.8.1)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} \cdot v \quad (2.8.2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi I}{c} + \frac{4\pi C}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.8.3)$$

donde  $d$  es la densidad del campo magnético;  $c$  es la capacitancia por unidad de área; la ecuación (2.8.1) es el efecto en la fase de posición del campo magnético  $H$ ; la ecuación (2.8.2) es la fase dependiendo del tiempo; finalmente la ecuación (2.8.3) es la ecuación de Maxwell, esto es,  $\text{curl } H = \nabla \times H = \frac{4\pi}{c} I + \frac{\partial D}{c \partial t}$ .

Las ecuaciones (2.8.1)-(2.8.2)-(2.8.3) es el conjunto de ecuaciones que describen el estado de la barrera (ignorando los efectos de la resistibilidad conjunta).

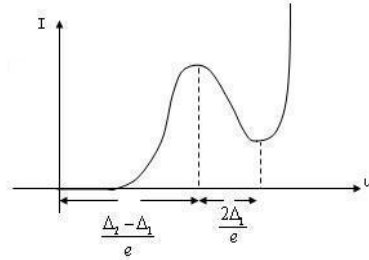


Figura 2.13: *Tunelamiento entre dos superconductores con energía gap  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , con  $\Delta_2 > \Delta_1$*

Las ecuaciones (2.8.1)-(2.8.2)-(2.8.3) se pueden expresar en conjunto

## 42 La descripción de los retratos de fases y las bifurcaciones básicas de la unión de Josephson

---

mediante la siguiente única ecuación para  $\phi(x, t)$ :

$$\nabla^2 \phi - \left( \frac{1}{v^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = \lambda^{-2} \sin \phi \quad (2.8.4)$$

donde

$$v = \frac{c}{(4\pi d c)^{1/2}}$$

y

$$\lambda = \left( \frac{\lambda c^2}{8\pi J_1 e d} \right)^{1/2}$$

Recordemos que, con respecto a la ecuación (2.8.1), la longitud de onda de un electrón es  $\frac{h}{mv}$  en presencia de un campo magnético, esta longitud cambia a  $\frac{h}{mv + e\frac{A}{c}}$ ; donde  $A$  es el vector potencial; así el campo magnético tiene un efecto sobre la longitud de onda. La teoría de superconductores de Ginzburg-Landau explica éste fenómeno.

De la ecuación (2.8.2) de la formula  $E = \hbar w$  explica la relación frecuencia-energía en la mecánica cuántica. Si la diferencia de potencia se aplica a través de la barrera, se libera la energía  $2ev$  entre sus lados. Esto corresponde a una diferencia de frecuencia de  $w = \frac{2ev}{\hbar}$ , y esta cantidad es la razón de la diferencia de fase que esta en la ecuación (2.8.2). Observemos que de la ecuación (2.8.4), para  $\phi$  independiente de la posición obtenemos,

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + w^2 \phi = 0$$

$$\text{con } w = \frac{\mu}{\lambda}.$$

También en presencia de un campo magnético, la corriente crítica  $I_c$  es modulada por este. La cual produce un fenómeno de difracción, tal como sucede en óptica con la formula de Fraunhofer, la cual es dada por

$$i_c = i_c(0) \left[ \frac{\text{sen}(\pi \phi_J / \phi_0)}{\pi \phi_J / \phi_0} \right] \quad (2.8.5)$$

donde  $\phi_J$  es el flujo del campo magnético aplicado y  $\phi_0 = h/2e$  es el flujo del superconductor,  $\phi_0 \cong 2,07 \times 10^{-15}$ , el cual es un valor extremadamente pequeño.

## CAPÍTULO 3

---

### Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson

---

#### 3.1. El modelo largo de unión de Josephson

En [F. Happ] se generaliza la ecuación (2.8.4) reconociendo su parámetro  $\sigma \geq 0$  y se obtiene el siguiente modelo con condiciones de frontera finita para la unión continua de Josephson (en el mismo documento se estudia el caso discreto):

$$\begin{cases} \varphi_{tt} + \sigma \varphi_t - \varphi_{xx} + \operatorname{sen} \varphi = 0 \\ \varphi_x(0, t) = H, \varphi_x(1, t) = H + \gamma; \end{cases}$$

y se demuestra que este sistema tiene al menos una órbita periódica exponencialmente estable para  $\sigma > 0$  y  $\gamma > 0$ .

A continuación realizamos un estudio cualitativo un poco más avanzado de la dinámica solitónica de la ecuación perturbada del tipo Sine-Gordon, la cual modela la unión larga de Josephson; encontrándose solitones simples y caóticos. Se realiza también el análisis de la sincronización causada por un campo magnético y en consecuencia, podemos construir la curva característica  $I - \vartheta$  en cada caso.

La investigación de localizar soluciones de la unión larga de Josephson es muy interesante y significativa por sus aplicaciones. En particular para encontrar los parámetros para los cuales surgen “solitones multiamortiguados” con la forma de estados acotados de solitones triviales (tren de solitones) y

## 44 Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson

---

que se propagan a través de la unión.

Los trenes de solitones para este modelo para la unión unidimensional corresponden a la ecuación en derivadas parciales con condiciones de frontera siguiente:

$$\begin{cases} \varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin(\varphi) + \alpha\varphi_t - \beta\varphi_{xxt} - \gamma \\ \text{con condiciones de frontera} \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(l, t) = q \sin(wt) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

donde  $\varphi(x, t)$  es la diferencia de fase para la ecuación de onda macroscópica de los superconductores;  $\gamma$  es la corriente externa normalizada;  $\beta\varphi_{xxt}$  y  $\alpha\varphi_t$  son los componentes disipativos responsables por la corriente electrónica ordinaria a través de la unión; " $\ell$ " es la longitud de la unión. El sistema (3.1.1) describe una unión libre cuanto  $q = 0$  y la unión forzada por un campo magnético externo si  $q \neq 0$ .

La ecuación (3.1.1) ha sido ampliamente estudiada, cuando  $\beta = 0$ , caso para el cual se conoció el efecto de un campo magnético externo sobre la  $I - \vartheta$  curva característica de unión. Para  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $I$  suficientemente pequeños pero no nulos, encontramos la existencia de una solución homoclínica hacia equilibrios del tipo silla-nodo, construida sobre la base de la solución exacta de la ecuación Sine-Gordon ( $\alpha = \beta = I = 0$ ); al mismo tiempo los experimentos numéricos y físicos han encontrado una dinámica muy diversa de este tipo de unión, lo que ha permitido investigar la curva característica,  $I - \vartheta$ , la cual describe los cambios estructurales de la evolución de los solitones multiamortiguados.

### 3.2. Teoría cualitativa de la curva característica de la unión larga de Josephson

Este estudio arroja los siguientes conceptos

- i) La diferencia de potencial entre los electrodos superconductores,  $v(x, t)$ , varía proporcionalmente a  $\varphi_t(x, t)$ . La ecuación (3.1.1) tiene una solución de la forma  $\varphi(\xi)$ , donde  $\xi = ct - x$  es el cambio de variable de una onda viajera con velocidad  $c$ ; además como estas soluciones tienen la forma  $\tan(\frac{\varphi(\xi)}{4}) = e^{-\xi}$  se cumple que

$$\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = \pm 2n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.2.1)$$

Por lo cual  $\varphi_t(\xi)$  tiene la forma de un solitón multiamortiguado análogo al de la figura (1.8). Aunque la propagación del frente de ondas a través de la unión produce pulsaciones en el voltaje, el voltaje promedio es constante e igual a

$$v = \frac{c2\pi n}{l}, n \in \mathbb{N} \quad (3.2.2)$$

Por ello para conocer la dependencia del voltaje medio “ $v$ ” sobre la corriente externa “ $\gamma$ ” es necesario el conocimiento de “ $c$ ”; con ello se construye la curva característica  $I - v$ .

- ii) El sistema (3.1.1) será analizado para una clase de soluciones  $\varphi(-x+ct)$ . Estas soluciones conducen al sistema siguiente:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \varphi \\ \dot{y} = z \\ \beta c \dot{z} = -(1 - c^2)z + \alpha cy + \sin \varphi - \gamma \end{cases} \quad (3.2.3)$$

donde la derivada se realiza con respecto a la variable  $\xi = -x + ct$ . La cual proviene del modelo discreto Sine-Gordon siguiente:

$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} + \alpha \frac{d\varphi_n}{dt} + \sin \varphi + \gamma - \frac{1}{a^2}(\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}) = 0$ , donde  $\alpha$  es la constante de disipación de la unión,  $\alpha = \left(\frac{\phi_0}{2\pi I_c R^2 C}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\varphi_n(t) = \varphi(x, t)$ ,  $\varphi_{n+1}(t) = \varphi(x, t) \pm h\varphi_x + \frac{1}{2}h^2\varphi_{2x} + \dots$ , con  $\varphi_{nx} = \frac{\partial^n \varphi(x, y)}{\partial x^n}$ , con  $n.h = 1$  para  $n$  grande.

Existe un sistema dinámico en el espacio de fases alternando estados de equilibrio de dos tipos: silla-foco, con su separatriz estable unidimensional, o silla-foco con separatriz estable bidimensional estable.

Las llamadas trayectorias homoclínicas, esto es, las trayectorias que son biasintóticas ( $\xi \rightarrow \pm\infty$ ) relativa a estos puntos, cubren el cilindro un número “ $n$ ” arbitrario de veces antes de cerrar. Para  $n = 1$ , la trayectoria corresponde un salto ordinario de  $\varphi$  o un solitón  $\varphi_t$ . Las órbitas son monotónicas en el caso de equilibrio del tipo silla; o tendrá soluciones oscilando permanentemente en torno al equilibrio, en el caso silla-nodo; mientras que para el caso  $n > 1$ , tendremos un solitón con  $n$ -saltos (un paquete de solitones).

## 46 Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson

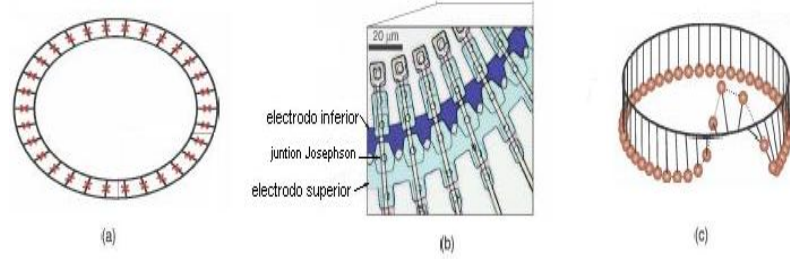


Figura 3.1: a) Esquema de un arreglo anular. b) Microfotografía de un arreglo real. c) Simulación pendular equivalente a  $n$ -arreglo anular de Josephson con solitón; fusión de  $2\pi$ - solitones de la misma polaridad con un único  $4\pi$  solitón.

En este estudio nos interesamos en diferentes tipos de ondas estacionarias para constantes  $\alpha$  y  $\beta$  (ambos parámetros se toman aproximadamente iguales a  $10^{-2}$ ), e investigamos la dependencia de la velocidad  $c$  del parámetro  $\gamma$ . Para estos propósitos construiremos superficies en el espacio de fases tridimensional del sistema (3.2.3) que son interceptados transversalmente a lo largo de sus trayectorias. Estas superficies estables muestran algunas regiones (“túneles”), dentro de los cuales se localizan las separatrices estables e inestables asociados a los puntos de sillas. La investigación analítica de la localización de estos “túneles”, provee la existencia de trayectorias homoclínicas  $n$ -envolventes y, consecuentemente, solitones de  $n$ -saltos para la ecuación (3.1.1).

La prueba analítica de los  $n$ -solitones nos permiten proponer, al menos computacionalmente, gráficas  $c_n$  contra  $\gamma$ . Las trayectorias homoclínicas del sistema (3.2.3) con separatrices estables de dimensión dos corresponden a curvas que designamos como curvas  $\pi^n$ ; mientras que las otras dimensiones inestables de dimensión son de dos las denominamos como curvas  $P^n$ . Se puede comprobar que existe sólo una curva del tipo  $\pi^1$  en el plano  $c - \gamma$ ; la situación es completamente diferente de multi-solitones, y se puede ver que  $\pi_1^3$  esta entre  $\pi^4$  y  $\pi_1^4$  (estos últimos son los dos tipos de curvas 4-homoclínicas).

Los resultados de los experimentos numéricos verifican que las soluciones estacionarias para medios no acotados dan una buena aproximación para medios acotados del sistema (3.1.1) (cuando  $q = 0$ ), dado que la longitud de la unión es mucho más grande.

- iii) Los solitones correspondientes a las curvas características de la unión deben ser estables en algún sentido, por esta estabilidad entendemos el comportamiento de los solitones con respecto a una amplia gama de condiciones iniciales  $\varphi(0, x)$ .

La integración numérica de (3.1.1) cuando  $q = 0$  revela que el solitón corresponde a un único salto a  $\pi^1$  son estables; mientras que los multi-solitones solamente son estables los correspondientes a las curvas de bifurcaciones  $\pi^n$ . Como un 5-solitón puede ser tratado como un tren de un 3-solitones y un 2-solitones, la dinámica del 5-solitones recuerda la dinámica de las perturbaciones de la ecuación clásica del modelo Kdv.

- iv) El resultado del análisis cualitativo correspondiente a la dinámica de (3.2.3) conduce a las siguientes conclusiones sobre las,  $I - v$  curvas características de la unión Josephson: hay dos diagramas diferentes de las curvas características  $I - v$ ; si  $\beta$  es próximo de cero existe solamente una curva  $\pi^1$  en el plano  $(c, I)$  y consecuentemente, la curva característica  $I - v$  de Josephson consiste de un trazo; al crecer  $\beta$  la tal curva característica contiene infinito número de partes, cada parte corresponde al voltaje de multisolitones ( $n = 2, 3, 4$ ); cuando en estas líneas de bifurcación corresponden a valores próximos de  $c$ , las correspondientes partes están muy cercanas unas de las otras haciéndose indistinguibles.

Además del voltaje u medio de la unión crece con  $n$ , pero tiene un límite superior, pues hay sólo una cantidad de  $n$ -solitones realizables para la longitud finita  $l$  de la unión; a la vez el rango de variación de la corriente bias decrece cuando  $n$  crece.

### **3.3. Las curvas característica de Josephson $I - v$ forzadas por un campo magnético alternante**

Cuando un campo magnético de frecuencia  $w$  fuerza una unión de Josephson, se observa el nuevo fenómeno cualitativamente diferente denominado “solitones sincronizados por el campo”. Para multi-solitones, introducimos la frecuencia intrínseca siguiente

$$V(\alpha, \beta) = \langle \dot{\theta} \rangle = \frac{\int_0^T(t)dt}{\int_0^T dt} w_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{2l}{c}$$

los cuales describen el movimiento de un  $n$ -solitón en una unión libre. Cuando  $w \approx w_0$ , un  $m$ -solitón se sincroniza con el campo magnético externo



## 48 Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson

---

mediante el tiempo necesario para que un  $n$ -solitón se mueva una distancia de  $2l$  y coincida con el período del campo magnético externo.

En ausencia del campo magnético, cada valor de la corriente bias corresponde (para  $n$  fijo) a un valor de la velocidad del  $n$ -solitón ó (tomando en cuenta la relación entre  $c$  y  $v$ ) a un valor del voltaje de la unión. En presencia del campo magnético de frecuencia  $w$ , un único valor de  $c$  (ó respectivamente de  $v$ ) corresponde a cierto rango de valores para la corriente bias, cada  $n$  teniendo su correspondiente rango de valores. El valor de  $c$  es tal que un  $n$ -solitón se mueve una distancia de  $2l$  en un período del campo externo  $T = \frac{2\pi}{w}$ . Como resultado se forman pasos verticales en la curva característica de Josephson  $I - v$ .

El mecanismo de la sincronización se puede entender fácilmente comparando el campo magnético externo en diferentes puntos de la región de sincronización cuando el  $n$ -solitón se aproxima (uno de los lados) de la frontera de la unión. Para el valor promedio de  $\gamma$ , la fase de la oscilación senoidal que modela el campo externo es próxima a  $2\pi m$  (donde  $m$  es un entero). Consecuentemente, el campo externo tiene un valor instantáneo casi igual a cero y el solitón se propaga como si no existiera campo externo. Cuando el valor de  $\gamma$  se toma cerca del valor de la frontera más bajo, el solitón se aproxima a la frontera de la unión de Josephson.

Parte de la energía es entonces transferida del campo externo al solitón (el proceso es más efectivo en la frontera del intervalo de sincronización), lo cual resuelta en el incremento del promedio de la velocidad de los solitones. De una manera similar, cuando  $\gamma$  toma valores cercanos a la frontera de la unión en el instante en que el campo externo tiene un valor mínimo. En este caso parte de la energía es transferida del solitón al campo externo y la velocidad promedio del frente de ondas decrece.

Claramente la región de sincronización (el tamaño de los pasos) crece con el crecimiento de la amplitud del campo externo. Cuando  $w$  y  $w_0$  difieren significativamente, no hay sincronización y la curva característica  $I - v$  de la unión de Josephson forzada por el campo magnético no es diferente de la unión “libre”. Esto es explicado porque la fase del campo magnético es “nueva” y todo tiempo que el solitón se aproxima a la frontera de la unión; y el campo magnético externo transfiere su energía al solitón y algunas veces reduce su energía; lo cual conduce a que el “promedio” del efecto del campo externo y la velocidad promedia del solitón difieran suavemente de la velocidad de la unión “libre”.

### 3.4. Trayectoria homoclínicas y solitones.

Para simplificar el sistema (3.2.3) introducimos las siguientes variables:  $\theta = \pi - \varphi$ ,  $y_H = -y$  y  $z_H = -z$ , entonces omitiendo el subíndice  $H$ , obtenemos

$$\dot{\theta} = y, \quad \dot{y} = z$$

$$\beta c \dot{z} = -(1 - c^2)z + c\alpha y - \sin \theta + \gamma \quad (3.4.1)$$

Ubicamos el retrato de fases del sistema (3.4.1) en un cilindro  $G = S^1 \times \mathbb{R}^2$ .

Para  $\gamma < 1$  el sistema tiene dos puntos de equilibrio del tipo silla:  $0_1(\theta = \theta_1 = \arcsin(\gamma), y = z = 0)$  y  $0_2(\theta = \theta_2 = \pi - \arcsin \gamma, y = z = 0)$ . El equilibrio  $0_1$  tiene una separatriz estable de la dimensión 1 y una separatriz inestable de dimensión dos; mientras que  $0_2$  tiene una separatriz estable de dimensión dos y una separatriz inestable de dimensión uno.

Aparentemente, si una de las separatrices unidimensionales de los estados de equilibrio,  $\theta_j^0(\theta = \theta_j, y = z = 0)$  pertenece a una separatriz dos dimensional  $\theta_j^n(\theta = \theta_j - 2\pi n, y = z = 0)$  donde  $j = 1, 2; n = \pm 1 \pm 2, \dots$  entonces existe un lazo separatriz rotacional. Una trayectoria homoclínica del sistema (3.4.1), se muestra en la figura 3.3. Los puntos  $\theta_2^0$  y  $\theta_2^1$  se identifican y en vez de  $\theta$  introducimos de nuevo la coordenada  $\varphi$ .

Cuando  $\beta = 0$  ( $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ ) el sistema se reduce a un sistema de segundo orden el cual describe la dinámica del péndulo físico en un medio viscoso. En el caso  $\gamma < 1$ , el diagrama de bifurcación contiene dos curvas:  $\gamma = \gamma^*\left(\frac{\alpha c}{\sqrt{1-c^2}}\right)$  y  $\gamma = \gamma^*\left(\frac{\alpha c}{\sqrt{c^2-1}}\right)$ , las cuales corresponden a diferentes trayectorias homoclínicas rotacionales ( $\gamma^*(\cdot)$ ).

En este caso cuando  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = H$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, \ell) = H + Y$ , para el caso discreto y continuo, con  $\alpha > 0$  y  $\gamma > 0$ , existe exactamente una órbita periódica exponencialmente estable, ver [LE, HO]

Cuando  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ , se debe notar que el sistema (3.4.1) no tiene equilibrio diferentes de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Ahora consideremos la función de Lyapunov siguiente,

$$v(\theta, y, z) = \beta c \frac{z^2}{2} + \left(1 + \alpha\beta + \frac{\beta}{\alpha}\right) zy + (1 - c^2) \left(1 + \alpha\beta + \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{y^2}{2\beta c} +$$

$$(\sin \theta - I)y + \frac{(1 + \alpha\beta + \frac{\beta}{\alpha})}{\beta c} \times \int_{\theta_1}^{\theta} (\sin \theta - I) d\theta \quad (3.4.2)$$

la cual proviene de una función de energía del tipo

## 50 Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson

---

$$E = - \int_G \frac{1}{2} \phi \phi_{xx} + F(\phi) dx$$

donde

$$G(\phi) = \int_{\phi} (\sin \phi - \gamma) d\phi$$

La derivada de  $\vartheta$  a lo largo de (3.4.1),  $\dot{v}(\theta, y, z)$ , tiene la forma:

$$\dot{v}(\theta, y, z) = (c^2 + \alpha\beta + \frac{\beta}{\alpha}) + \alpha c y z + y^2 \left( \alpha^2 + \frac{\alpha}{\beta} \right) + (1 + \cos \theta) y^2.$$

Se puede ver fácilmente que  $\dot{v}(\theta, y, z) \geq 0$ , con  $\dot{v} = 0$  solamente sobre la línea recta  $\{y = c = 0\}$ . Consecuentemente el sistema (3.4.1), no tiene equilibrios ondulatorias diferentes de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

Demostraremos que existe en  $G$  una región absorbente. Para ello consideremos dos familias de planos:

$$\begin{aligned} W_1 &= z - \delta \left( y + \frac{(1 + \gamma)}{\alpha c} \right) = h \\ W_2 &= z - \delta \left( y - \frac{(1 - \gamma)}{\alpha c} \right) = -h \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

donde  $h = \text{constante} \geq 0$ ,

$$\delta = \frac{((1 - c^2)^2 + 4\alpha\beta c^2)^{\frac{1}{2}} - (1 - c^2)}{2\beta c}$$

Por el sistema (3.4.1), las derivadas de estas funciones  $W_1$  y  $W_2$  a lo largo de este sistema se intersecten según las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \dot{W}_1|_{w_1=h} &= -\frac{1 + \sin \theta}{\beta c} - \frac{\alpha h}{\beta \delta} < 0 \\ \dot{W}_2|_{w_2=-h} &= \frac{1 - \sin \theta}{\beta c} + \frac{\alpha h}{\beta \delta} > 0 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Las desigualdades (3.4.4) implica que  $W_1 = h$ ,  $W_2 = -h$  son superficies que son interceptadas transversalmente a lo largo de una solución del sistema (3.4.1).

Designamos por  $G^+$  la porción de  $G$  acotadas por los planos “límites”  $W_{1,2}$ . Por (3.4.4) cualquier trayectoria de (3.4.1) con condiciones de frontera

de  $G^+$  entra a esta región y no la abandona, esto es,  $G^+$  es una región absorbente. Se puede ver fácilmente que  $G^+$  pertenece exclusivamente al semi-plano  $z > 0$  cuando  $y > -\frac{(1+\gamma)}{\alpha c}$  y al semiespacio  $z < 0$  cuando  $y < -\frac{(1+\gamma)}{\alpha c}$ . Esto y la ecuación  $\dot{y} = z$  del sistema (3.4.1) produce que cualquier trayectoria dentro de  $G^+$  intercepta los planos

$$Q_1 = \left\{ y = \frac{1-\gamma}{\alpha c} \right\}, Q_2 = \left\{ y = -\frac{1-\gamma}{\alpha c} \right\}.$$

Cuando  $\xi \rightarrow +\infty$ , esto es ( $|y|, |z| \rightarrow \infty$ ), el sistema (3.4.1) será restringido a la región  $G_1^+$ , la parte de  $G^+$  encerrada por los planos  $Q_1$  y  $Q_2$ ; además podemos distinguir en  $G_1^+$  la cual región "delgada" absorbente,  $G_0^+$ , que esta encerrada entre las siguientes dos superficies:

$$\begin{aligned} W_3 &= z - \delta y + \frac{\delta(\sin \theta - \gamma)}{\alpha c} = z_0 \\ W_4 &= z - \delta y + \frac{\delta(\sin \theta - \gamma)}{\alpha c} = -z_0 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

donde  $z_0 = \delta^2(1 + \gamma)\beta\alpha^{-3}c^{-2}$ . En efecto realizando derivadas en la dirección del sistema (3.2.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{W}_3|_{w_3=k} &= -\frac{\alpha k}{\beta\delta} + \frac{\delta}{\alpha c} \cos \theta \cdot y \\ \dot{W}_4|_{w_4=-k} &= \frac{\alpha k}{\beta\delta} + \frac{\delta}{\alpha c} \cos \theta \cdot y \end{aligned}$$

Claramente, cuando  $k \geq k_0$  obtenemos las siguientes desigualdades

$$\dot{W}_3|_{w_3=k} < 0 \quad y \quad \dot{W}_4|_{w_4=-k} > 0.$$

Las cuales se interceptan en todos los puntos de la región  $G_1^+$  y  $G_0^+$  es ahora una región absorbente. En consecuencia, como el campo vectorial (3.4.1) en la frontera de  $G_0^+$  es orientado hacia adentro de  $G_0^+$ , las desigualdades

$$\delta y - \frac{\delta}{\alpha c}(\sin \theta - \gamma) - z_0 < z < \delta y - \frac{\delta}{\alpha c}(\sin \theta - \gamma) + z_0 \quad (3.4.6)$$

se satisfacen para cualquier solución  $\{\theta(\xi), y(\xi), z(\xi)\}$  del sistema (3.4.1) que entra y por ello permanece en la región  $G_0^+$ .

A continuación introducimos el sistema auxiliar de la forma

## 52 Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson

---

$$\dot{\theta} = y, \quad \dot{y} = \delta y - \frac{\delta}{\alpha c}(\sin \theta - \gamma) + z_0 \quad (3.4.7)$$

Note que el sistema (3.4.7) es la ecuación del péndulo; puesto que el sistema (3.4.7) es independiente de  $z$ , sus trayectorias forman en  $G_0^+$  una superficie cilíndrica conectando las superficies  $W_3 = z_0$  y  $W_4 = -z_0$ .

Esta superficie cilíndrica dentro de  $G_0^+$  son interceptadas transversalmente en una dirección de las trayectorias del sistema (3.4.1). Ello puede ser usado de aquí en adelante para construir túneles que maximizan las separatrices del punto de silla  $\theta_2$ .

La sección transversal ( $z=\text{constante}$ ) de los túneles para (3.4.7) y la correspondiente orientación del campo vectorial del sistema (3.4.1) son presentados en la figura 3.2.

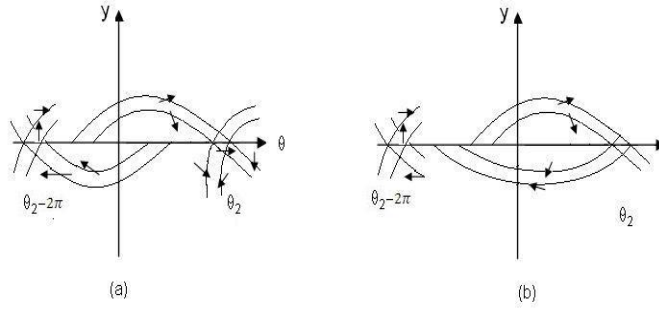


Figura 3.2: Orientación del campo (3.4.1) en los túneles para  $z = \text{constante}$ .

Los túneles son regiones que contienen soluciones  $\phi(t)$  encerradas por curvas  $\alpha(t) < \phi(t) < \beta(t)$  y atrapan las soluciones para  $t \in [a, b]$  y atrapan sus pequeñas perturbaciones  $\phi(t)$  con  $|\phi_\varepsilon(t) - \phi(t)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) (e^{k|t-a|} - 1)$  para  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $k \geq 1$ .

La sección transversal a los túneles ( $\dot{z} = \text{constante}$ ) y la dirección del campo vectorial de la figura (3.2 a)) corresponde a una región  $d_2^+$  del espacio de parámetros,  $d_2^+$  corresponde a las desigualdades,

$$0 \leq \gamma \leq \begin{cases} \frac{\alpha^2 c - \beta \delta}{\alpha^2 c + \beta \delta} & \text{si } \sqrt{\alpha \delta c} \geq \lambda^* \\ \frac{\alpha^2 c I^*(\sqrt{\alpha \delta c}) - \beta \delta}{\alpha^2 c + \beta \delta} & \text{si } \sqrt{\alpha \delta c} < \lambda^* \end{cases} \quad (3.4.8)$$

donde  $\gamma^* = 1,193$  intercepta la condición  $\gamma^*(\lambda^*) = 1$ . Los parámetros en la región  $d_2^-$  satisfacen las siguientes desigualdades

$$\frac{\gamma^*(\sqrt{\alpha\delta c}) + \beta\delta}{\alpha^2 c + \beta\delta} < \gamma < \frac{\alpha^2 c - \beta\delta}{\alpha^2 c + \beta\delta},$$

$$\alpha^2 c - \beta\delta > 0, \quad y \quad \sqrt{\delta\alpha c} < \lambda^*$$

resultan los túneles los cuales son presentados en la figura 3.2(b).

Puesto que las uno y dos-dimensionales separatriz del estado de equilibrio  $\theta_2$  están en los túneles y son localizados inversamente en los puntos de las regiones  $d_2^+$  y  $d_2^-$  cuando  $y < 0$ , entonces existe en el espacio de parámetros del sistema entre  $d_2^+$  y  $d_2^-$  (3.4.1) un conjunto de bifurcaciones  $\pi^1$  de codimension uno, el cual corresponde a la existencia de un lazo separatriz rotacional conectando los puntos  $0_2^0(\theta = \theta_2, y = z = 0)$  y  $0_2^1(\theta = \theta_2 - 2\pi, y = z = 0)$  (esto es en  $n=1$ ). Ver figura 3.3

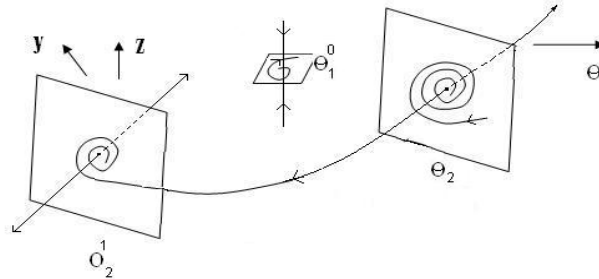


Figura 3.3: Lazo separatriz en el espacio de fases  $G$  para el sistema (3.4.1); ver sección 1.8.

Regresando de nuevo a la variable original  $\varphi$ , nosotros encontramos que los puntos de bifurcación del conjunto  $\pi^1$  corresponden al lazo separatriz rotacional, conectando los equilibrios tipo silla ( $\varphi = \varphi_2, \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ ) con el equilibrio ( $\varphi = \varphi_2 + 2\pi, \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 2\pi$ ).

con el cual conecta el estado de equilibrio tipo silla de coordenadas ( $\varphi = \varphi_1, \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ ) con ( $\varphi = \varphi_2 + 2\pi, \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ ). En este caso para el campo (3.2.3) también existe en el espacio de parámetros regiones  $d_1^+, d_1^1$

Análogas a  $d_2^+, d_2^1$ . en el espacio de parámetros existen las regiones  $d_{1,2}^{+,-}$  las cuales se dibujan en el plano  $(c, \gamma)$  (para  $\alpha = 0,5, \beta = 0,02$ ) en la figura 3.4, la cual también muestra las curvas  $\pi^1$ .

## 54 Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson

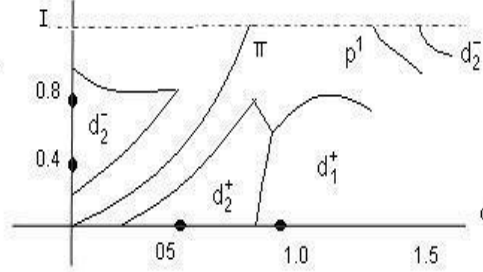


Figura 3.4: Sección transversal  $d_{1,1}^+$  para  $\alpha = 0,5$ ;  $\beta = 0,02$

El diagrama de bifurcación en el plano  $(c, \gamma)$ , para  $\beta$  pequeño, contiene solamente las componentes de  $\pi^1$  y  $P^1$  como se ve en la figura 3.4

Cuando el parámetro  $\beta$  crece un poco más las curvas  $\pi^1$  y  $P^1$  se desarrollan como sigue: comenzando con un valor  $\beta$ , estas curvas no interceptan la línea  $\gamma = 1$  y se ilustran cuando  $c = 1$  y  $\gamma < 1$ . Cuando  $\gamma < 1$  de las curvas se interceptan porque el sistema es reversible cuando  $c = 1$  (es invariante a la transformación  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ,  $\xi_H \rightarrow -\xi_H$ ,  $z \rightarrow -z$ ); en consecuencia, existe una trayectoria conectado los puntos  $0_2^0$  y  $0_2^1$ , entonces para los mismos valores de parámetros, existe también una trayectoria conectado  $0_1^0$  y  $0_1^1$ .

Cuando  $\beta$  crece un poco más, las componentes  $\pi_c^1$  y  $P_c^1$  aparecen sobre las curvas  $\pi^1$  y  $P^1$ . Si los parámetros del sistema (3.4.1) pertenecen a las componentes  $\pi_c^1$  y  $P_c^1$ , el estado de equilibrio corresponde a una silla-foco con un valor de silla positivo.

Entonces de acuerdo con Shilnikov y Belyakov [Shi, Belk] el conjunto de bifurcación del sistema (3.4.1) en la vecindad de  $\pi_c^1$  y  $P_c^1$  contiene una cantidad infinita de curvas las cuales corresponden a un conjunto hiperbólico no-trivial en el espacio de fases. En particular para  $n < 1$  el sistema (3.4.1), existe un conjunto contable de superficies de bifurcación que corresponden al lazo separatriz de la envolvente de los  $2\pi n$  fuentes de ondas (solitones multisaltos). Por ejemplo, cuando  $c < 1$  existe un conjunto contable de curvas,  $\{\pi_j^2\}_{j=1}^\infty$ , las cuales corresponden a doble envoltura de los lazos separatrices rotacionales que conectan los puntos  $0_1^0$  y  $0_1^2$ , los cuales hacen  $j$  oscilaciones en la vecindad del punto  $0_1^1$ . En otras palabras, una propiedad común de todas las curvas  $\pi_j^2$  es que un 2-soliton corresponde a cualquiera de estas curvas y consecuentemente, un tren compuesto de 2-solitones puede

propagarse el sistema (3.1.1) para los valores de parámetros en  $\{\pi_j^2\}_{j=1}^\infty$ .

Los solitones correspondientes a las curvas  $\pi_j^2$  con diferentes  $j$  difieren uno del otro por el número de oscilaciones en el nivel  $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$ . Cada una de las curvas  $\pi_j^2$  en el plano  $(c, \gamma)$  es una curva parabólica. Las partes más altas de “las parábolas”, cuando  $j \rightarrow \infty$ , tiende al punto  $A$ , en  $\pi$  donde el valor de la silla se convierte en cero.

Las curvas  $\pi_j^2$ ,  $j > 1$ , están localmente dentro de una pequeña región  $\pi^1$  y  $\pi_1^2$  sobre el plano  $(c, \gamma)$ . La curva  $\pi_1^2$  se muestra en la figura 3.4. Note que aunque todos los puntos de la curva  $\pi_1^2$  corresponden a solitones con  $n = 2$  y  $j = 1$ , sus formas son cualitativamente diferentes dependiendo de la elección del parámetro escogido sobre  $\pi_1^2$ .

Si los parámetros son tomados en la parte de  $\pi_1^2$  que es próxima a la curva  $\pi^1$ , la forma de solitón es como el de los solitones con  $n = 1$ ; mientras que para valores de parámetros pertenecientes a la otra parte de la “parábola”  $\pi_1^2$ , el solitón tiene la forma de la figura (1.8). Se nota que aunque la curvas  $\pi$  y  $\pi_1^2$  son próximas la una de la otra, ellas no se interceptan.

Además entre cada par de curvas  $\pi_j^2$  y  $\pi_{j+1}^2$  existe un conjunto de bifurcación constituido por curvas  $\pi_{jl}^2$  (donde  $l$  depende de  $j$ ) las cuales corresponden a una 3-envolvente de lazo separatriz que conecta los puntos  $0_1^0$  y  $0_1^3$ . También 3-solitones pueden propagarse en (3.1.1) para valores de parámetros en  $\pi_{jl}^3$ . Simulaciones numéricas del sistema (3.4.1) revela que debajo de la curva  $\pi_1^2$  se localiza una curva parabólica  $\pi_1^3$ . También la curva  $\pi_1^3$  es encerrada por las curvas parabólicas  $\pi_1^4$  y  $\pi^4$ .

Una situación similar ocurre para  $c > 1$ . En este caso, existe además de  $P^1$ , conjunto de bifurcación  $P_j^2$ ,  $P_{jl}^3$ , las cuales corresponden a solitones cuya cola tienden a los equilibrios  $\varphi = \varphi_2$  y  $\varphi = \varphi_2 - 2\pi n$ .

Así el diagrama de bifurcación del sistema (3.4.1) contiene un infinito de elementos y por ello no puede ser representado en forma completa, pero sus regularidades son claras. El plano  $(c, \gamma)$  contiene dos familias de curvas  $\pi$  y  $P$ , respectivamente para  $c < 1$  y  $c > 1$ . Cada curva de bifurcación de la familia  $\pi$  se intercepta, cuando  $c = 1$ , con una curva análoga de la familia  $P$  (el sistema es reversible cuando  $c = 1$ ).



## 56 Tren de solitones y las curvas características de la unión larga de Josephson

---

Todas las curvas de bifurcación, excepto  $\pi^1$  y  $P^1$ , son curvas parabólicas. Notemos también que las curvas de bifurcación corresponden a  $n$  fijo ( $n$ -solitón), tiene muchas componentes correspondientes a otros  $n$ .

La curva de bifurcación próxima corresponde a la forma del solitón. Por ejemplo  $\pi^4$  con  $\pi_1^4$ ; los puntos sobre la parte de  $\pi^4$  localizada cerca de  $\pi_1^4$  corresponden a solitones que pueden representarse como un estado acotado de un par de 2-solitones, con  $n = 2$ . Mientras que los puntos sobre  $\pi_1^2$  cerca de  $\pi_1^3$ , corresponden a los frentes de ondas de un paquete de dos solitones con  $n = 3$  y  $n = 1$ .

## CAPÍTULO 4

---

### Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los $\pi$ —saltos en una $0 - \pi$ unión de Josephson.

---

#### 4.1. Introducción

Una aplicación importante de la ecuación Sine-Gordon es describir la propagación de flujos en uniones largas de Josephson. Los flujos cuánticos o fluxones, son descritos por un salto en la ecuación de Sine-Gordon. Cuando muchas y pequeñas uniones son conectadas a través de la inductancia de los superconductores, ellos forman una línea de transmisión discreta de Josephson. La propagación de un fluxon es entonces descrita por una ecuación Sine-Gordon discreta. Algunos materiales son más fácil fabricarlos mediante un retículo que mediante una unión continua de Josephson; en el límite acoplado la unión discreta se transforma en una unión continua de Josephson.

Recientemente una conjetura, la cual fue propuesta en 1970 por Bulaevskii sobre el  $\pi$ —salto de la fase en la ecuación de Sine-Gordon [VaV] afirma que esta se debe a impurezas magnéticas este salto se caracteriza por la presencia de una corriente crítica negativa en la unión, y es propia por ejemplo en los superconductores constituidos por  $yB_{a2}Cu_3O_7 - Au - Nb$ . Inclusive en esta estructura la fases de la unión de Josephson llegan a tener signos opuestos con respecto a la corriente crítica  $I_c$ , generando espontáneamente semiflujos, esto es, flujos fraccionales cerca de las esquinas, como se muestra en la figura 4.3. El cual se usa para probar la simetría del “gap”, y este a su vez, puede ser usada en memoria superconductora en

## 58 Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los $\pi$ -saltos en una $0 - \pi$ unión de Josephson.

montajes lógicos, o en mediciones de longitud de penetración de las uniones de Josephson.

Una región la cual contiene un salto de fase  $\pi$  es llamada una  $0 - \pi$  unión de Josephson y es descrita por una ecuación  $0 - \pi$  de Sine-Gordon. El lugar donde la unión intercepta la unión  $\pi$  corresponde a un punto de discontinuidad. Una  $0 - \pi$  unión de Josephson admite semiflujos magnéticos, también llamados  $\pi$ -fluxones, relacionados con los puntos de discontinuidad. Un semiflujo es representado por  $\pi$ -salto en la  $0 - \pi$  ecuación Sine-Gordon.

Estudiamos en esta sección el comportamiento cualitativo que surge por desaparición del autovalor cero. Ver sección 1.3 y sección 1.5. La estabilidad se puede simular mediante los sistemas de la figura 4.1:

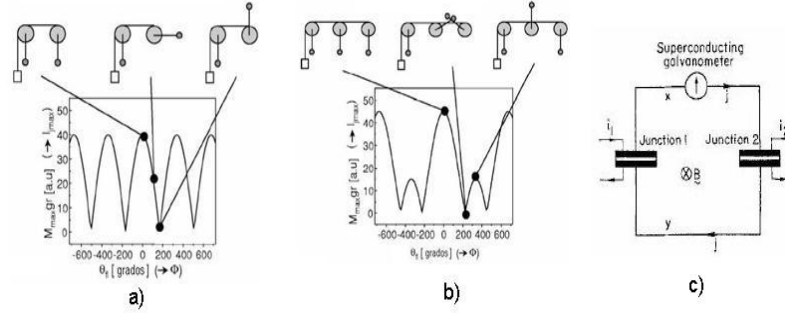


Figura 4.1: a) Simulación pendular de dos o tres uniones Josephson en paralelo. b) Circuito para las uniones de Josephson en paralelo.

## 4.2. El modelo para la $0 - \pi$ ecuación discreta de Sine-Gordon

El lagrangiano que describe el arreglo  $0 - \pi$  de la unión de Josephson es dado por la siguiente expresión

$$L = \int \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_n}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{a} \right)^2 - 1 + \cos(\varphi_n + \theta_n) + \gamma \theta_n \right] dt \quad (4.2.1)$$

donde  $\phi_n$  es la fase de n-uni3n; el  $\pi$  salto de fase es descrito por

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ -\pi & 0 < n \end{cases} \quad (4.2.2)$$

El parámetro espacial  $a$  corresponde con la  $\lambda_j$  longitud de Josephson; el tiempo  $t$  es normalizado con la frecuencia  $w_0^{-1}$ ; y la corriente bias con densidad  $\gamma > 0$  es escalonada con la densidad de corriente crítica  $I_c$ . La ecuación del movimiento de fase generado por el lagrangiano (4.2.1) es la siguiente ecuación discreta Sine-Gordon:

$$\ddot{\phi}_n - \frac{\phi_{n-1} - 2\phi_n + \phi_{n+1}}{a^2} = -\sin(\phi_n + \theta_n) + \gamma \quad (4.2.3)$$

para  $n \in \mathbb{Z}$ , pero en términos prácticos  $n$  es limitado por  $2N$ . Tomamos las condiciones de frontera teniendo en cuenta la manera como es aplicado al sistema el campo magnético  $h = \frac{H}{(\lambda_j I_c)}$ , esto es:

$$\frac{\phi_{-N+1} - \phi_{-N}}{a} = \frac{\phi_N - \phi_{N-1}}{a} = h; \quad (4.2.4)$$

en lo que sigue primero consideramos el caso  $h = 0$ .

### 4.3. Aproximación para el retículo espacial en el límite continuo

Existe varios modelos continuos de aproximación de (4.2.4) en el límite continuo cuando  $a \ll 1$ . Escribiendo  $\phi_n = \phi(na)$  y expandiendo los términos de diferencias en una expansión de Taylor como la siguiente

$$\begin{cases} \frac{\phi_{n-1} - 2\phi_n + \phi_{n+1}}{a^2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k+2)!} \partial_{xx}^k \phi_{xx}(na) = L_a \phi_{xx} \\ \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(k+1)!} \partial_x^k \phi(na) = \tilde{L}_a \phi_x \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Así la aproximación continua (4.2.3) es

$$\phi_{tt} - L_a \phi_{xx} = -\sin(\phi + \theta) + \gamma \quad (4.3.2)$$

donde  $\theta(x)$  es definido similarmente a (4.2.2), esto es

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\pi, & x > 0 \end{cases}$$

La aproximación continua para el Lagrangiano asociado a (4.3.2) (ver ejemplos 1 y 2 de la sección 1.2) es

$$L = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} (\phi_t)^2 - \frac{1}{2} (L_a \tilde{\phi}_x)^2 - 1 + \cos(\phi + \theta) + \gamma \theta \right] dx dt$$

## 60 Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los $\pi$ -saltos en una $0 - \pi$ unión de Josephson.

---

Notando que la normalización en el sistema discreto implica que la coordenada espacial  $x$  es normalizada por la longitud de Josephson  $\lambda_j$ .

Existen varias maneras para construir la aproximación del operador  $L_a$  cuando  $a \rightarrow 0$ ; la primera obviamente es

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \frac{a^2}{12}\phi_{xxx} = -\sin(\phi + \theta) + \gamma, \quad x \neq 0 \quad (4.3.3)$$

otra aproximación se puede encontrar usando el hecho dado por

$$(1 - \frac{a^2}{12}\partial_{xx})L_a = 1 - \frac{a^4}{240}\partial_{xx}^2 + \dots$$

Este resultado refleja la invertibilidad de  $L_a$  hasta orden cuatro. Aquí  $1 - \frac{a^2}{12}\partial_{xx}$  actúa en (4.3.2) dando la siguiente aproximación (hasta términos de orden cuatro):

$$\phi_{xx} = \phi_{tt} + \sin(\phi + \theta) - \gamma - \frac{a^2}{12}\partial_{xx}(\phi_{tt} + \sin(\phi + \theta)), \quad x \neq 0 \quad (4.3.4)$$

Cuya ecuación estática  $\phi_{tt} = 0$ , es singularmente perturbada. Expandiendo esta ecuación y usando de nuevo la expansión para  $\phi_{xx}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_{xx} = & (\phi_{tt} + \sin(\phi + \theta) - \gamma - \frac{a^2}{12}(\phi_{ttt} + [\sin(\phi + \theta)]_{tt} \\ & - \phi_x^2 \sin(\phi + \theta)) + \cos(\phi + \theta)[\phi_{tt} + \sin(\phi + \theta) - \gamma]), \quad x \neq 0 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Cuya ecuación estática no proviene de un Hamiltoniano.

El Lagrangiano para el sistema igual a dos veces (4.3.4) menos (4.3.5) es,

$$L = \int \int \left[ \frac{1}{2}\phi_t^2 - \frac{1}{2}\phi_x^2 - 1 + \cos(\phi + \theta) + \gamma\phi + \frac{a^2}{2} \left( \phi_x \partial_x(\phi_{tt} + \sin(\phi + \theta)) + \frac{1}{2}(\phi_{tt} + \sin(\phi + \theta))^2 \right) \right]$$

la ecuación estática para dos veces (4.3.4) menos (4.3.5) es

$$\begin{aligned} \phi_{xx} = & \sin(\phi + \theta) - \gamma - \frac{a^2}{12}(2\phi_{xx} \cos(\phi + \theta)) - \phi_x^2 \sin(\phi + \theta) \\ & - \cos(\phi + \theta)(\sin(\phi + \theta) - \gamma), \quad x \neq 0 \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Esta ecuación es una perturbación regular del sistema Hamiltoniano siguiente,

$$H(\phi, P) = \frac{P^2}{2 \left(1 + \frac{a^2}{6} \cos(\phi + \theta)\right)} + \gamma\phi + \cos(\phi + \theta) - \frac{a^2}{24} (\sin(\phi + \theta) - \gamma)^2,$$

con

$$P = \phi_x \left(1 + \frac{a^2 \cos(\phi + \theta)}{2}\right)$$

El modelo (4.3.5) es no singular y tiene las mismas propiedades del sistema discreto, reflejando sus propiedades físicas.

#### 4.4. El $\pi$ -salto y su espectro en el límite continuo

En esta sección consideramos (4.3.5) con  $a = 0$ , el cual es el modelo ideal para una  $0 - \pi$  unión de Josephson:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin(\phi + \theta) = \gamma, \quad x \neq 0 \quad (4.4.1)$$

Para una unión de Josephson sin corriente bias o un salto en las fases,  $\gamma = 0$  y  $\phi(x) = 0$ , el modelo corresponde a una ecuación Sine-Gordon. Una solución estable es la solución básica siguiente,

$$\varphi_{Flux}(x) = 4 \arctan(e^x), \quad \phi_{Flux}(0) = \pi \quad (4.4.2)$$

En general la función de discontinuidad en (4.4.1) es para  $\phi_{xx}$  en  $x = 0$ . Luego el espacio natural para (4.4.1) consiste de funciones espacialmente continuas y tienen derivada espacial continua. El comportamiento en el infinito es regulado por el requerimiento de que la derivada espacial pertenezca a  $H_1(\mathbb{R})$  (el cual permite que la fase se aproxime a una constante en el infinito,  $\|\phi\|_1 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ ); luego, (4.4.1) es considerado como un sistema dinámico en el siguiente espacio funcional

$$\mathbb{H} = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \phi_x \in H_1(\mathbb{R})\}$$

Directamente se encuentra que para  $|\gamma| < 1$  y  $x < 0$ , los equilibrios de (4.4.1) son  $\phi_s^- = \arcsin(\gamma)$  y  $\phi_c^- = \arcsin(\gamma) + \pi$ .

Similarmente, para  $|\gamma| < 1$  y  $x > 0$ , estos puntos de equilibrio son  $\phi_s^+ = \arcsin(\gamma) + \pi$  y  $\phi_c^+ = \arcsin(\gamma) + 2\pi$ .

## 62 Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los $\pi$ -saltos en una $0 - \pi$ unión de Josephson.

---

En [Su, Vgils] se muestra que existe varios tipos de frente de ondas estacionarias, las cuales conectan estos equilibrios. Muchos frentes de ondas estacionarias son llamadas  $\pi$ -saltos, los cuales son ondas estáticas que conectan los estados de equilibrio en  $x = \pm\infty$  con una diferencia de fase de  $\pi$ . Tales ondas son soluciones de la ecuación de onda estática

$$\phi_{xx} - \sin(\phi + \theta) = -\gamma, \quad x \neq 0 \quad (4.4.3)$$

En la  $x$ -dinámica de (4.4.2), los puntos  $\phi_s^\pm$  son puntos de silla y los puntos  $\phi_c^\pm$  son puntos de centro. Así un  $\pi$ -salto conecta  $\phi_s^-$  con  $\phi_s^+$ .

Los varios tipos de  $\pi$ -saltos son contruidos tomando una combinación apropiada de los retratos de fases para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Los retratos de fases para  $\gamma = 0$  son esencialmente diferentes de los correspondientes para  $0 < \gamma < 1$  (el caso  $-1 < \gamma < 0$  sigue de este último tomando  $\phi \rightarrow -\phi$  y  $\gamma \rightarrow -\gamma$ ). En el caso  $\gamma > 0$  hay conexiones homoclínicas en  $k\pi + \arcsin(\gamma)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k$  par ( $\theta = 0$ ), o  $k$  impar ( $\theta = -\pi$ ). Si  $\gamma = 0$ , entonces estas conexiones homoclínicas se rompen creando conexiones heteroclínicas entre  $k\pi$  y  $(k+2)\pi$ .

Para el caso  $\gamma = 0$ , en la  $0 - \pi$  unión hay dos tipos de conexiones heteroclínicas. La primera llamada de tipo 1 y denotada por  $\phi_\pi^1(x; 0)$ , conecta 0 con  $\pi$ . El punto en el espacio de fase en los cuales está la unión es denotado por  $d_1(0)$ . El segundo, llamado de tipo 2 y denotado por  $\phi_{3\pi}^2(x; 0)$ , conecta 0 con  $3\pi$ . El punto en el espacio de fase donde esta la unión es denotado por  $d_2(0)$ . Esta solución no es un semiflujo, pero juega un rol en el análisis de los semiflujos para  $\gamma \neq 0$ .

Si  $0 < \gamma \ll 1$ , entonces hay tres tipos de  $\pi$ -saltos (conexiones heteroclínicas) en la unión todos conectan  $\arcsin(\gamma)$  y  $\pi + \arcsin(\gamma)$ . El primer semiflujo llamado de tipo 1 y denotado por  $\phi_\pi^1(x; \gamma)$  es una continuación de la conexión en  $\gamma = 0$ . El punto en el plano de fase donde está la unión es denotado por  $d_1(\gamma)$ . El  $\pi$ -fluxon  $\phi_\pi^1(x; \gamma)$  es monóticamente creciente.

El segundo tipo llamado de tipo 2 y denotado por  $\phi_\pi^2(x; \gamma)$ . En el límite para  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , este se rompe en  $3\pi$ -saltos y la conexión heteroclínica entre  $3\pi$  y  $\pi$  (un  $2\pi$ -dobletes o un antifixón). El punto en el espacio de fases donde está la unión es  $d_2(\gamma)$ . El  $\pi$ -fluxon  $\phi_\pi^2(x; \gamma)$  es monóticamente creciente pero

tiene un salto. Ver figura 4.2

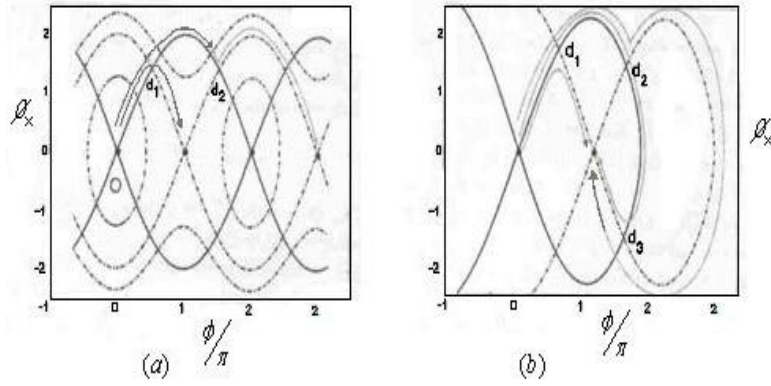


Figura 4.2: a) El retrato de fases para  $\gamma = 0$  las trayectorias para  $x < 0$  (líneas gruesas) y para  $x > 0$  (líneas suspendidas), saltan en  $x = 0$ . b) El retardo de fases para  $\gamma = 0,1$ ; además aparece  $d_3$  para describir el salto en  $x = 0$  y así describir una solución con diferencia de fase  $\pi$  entre los puntos extremos.

El tercer tipo llamado de tipo 3 es denotado por  $\phi_\pi^3(x; \gamma)$ . En el límite para  $\gamma \rightarrow 0$ , él rompe la conexión heteroclínica entre  $0$  y  $2\pi$  (fluxón) y un antfluxón ondulatorio como el de tipo 1 conecta  $2\pi$  con  $\pi$ . El punto periódico en el espacio de fases donde esta la unión es denotada por  $d_3(\gamma)$ . Este  $\pi$ -fluxón tiene un salto, pero menor que el de tipo 2. Siguiendo la primera órbita homoclínica, los puntos de unión son ordenados de tal manera que  $d_1(\gamma)$  viene primero, seguido de  $d_2(\gamma)$ . Si  $\gamma$  crece los puntos  $d_2(\gamma)$  y  $d_3(\gamma)$  se aproximan uno con el otro, hasta que coinciden en

$$\gamma = \gamma^* = \frac{2}{\sqrt{4 + \pi^2}} \quad (4.4.4)$$

en el punto  $(\pi + \arcsin(\gamma^*), 0)$ . En este punto, la onda de tipo  $\phi_\pi^2(x; \gamma)$  deja de existir (en el límite se rompe en dos mitades, la conexión homoclínica para  $x < 0$  y la conexión homoclínica completa para  $x > 0$ ).

El doblez de tipo 3,  $\phi_\pi^3(x; \gamma^*)$ , consiste en semiconexiones para  $x < 0$  y equilibrios para  $x > 0$ , y esta onda puede conectarse para  $\gamma > \gamma^*$ ; el doblez de tipo 3 es monótonico.

Si posteriormente  $\gamma$  crece, los puntos  $d_1(\gamma)$  y  $d_3(\gamma)$  se aproximan uno al otro hasta que coinciden en



**64 Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los  $\pi$ -saltos en una  $0 - \pi$  unión de Josephson.**

---

$$\gamma = \gamma_{cr} = \frac{2}{\pi} \quad (4.4.5)$$

Cuando  $\gamma = \gamma_{cr}$ , la órbita homoclínica al equilibrio hiperbólico para  $x < 0$  es tangencial en  $d_1(\gamma) = d_3(\gamma)$  a la variedad estable del equilibrio hiperbólico para  $x > 0$ . Tan pronto como  $\gamma > \gamma_{cr}$  no hay más intercepción de la órbita homoclínica para  $x < 0$  con la variedad estable del equilibrio hiperbólico para  $x > 0$ . Esto implica que no puede existir ningún  $\pi$ -fluxón.

Ahora mostraremos que el tipo 1 es no lineal estable para todo  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{cr}$ . El tipo 2 y el tipo 3 son inestables para todos los valores  $\gamma$  para los cuales existen los respectivos  $\pi$ -fluxones. Lo cual se sintetiza en el siguiente teorema:

**Teorema 4.4.1.** *Las linealizaciones de los varios  $\pi$ -saltos tienen las siguientes propiedades:*

- i) *Los autovalores de la linealización alrededor del tipo monotónico 1,  $\pi$ -fluxón  $\phi_\pi^1(x; \gamma)$ , son estrictamente negativos para  $0 \leq \gamma < \gamma_{cr}$ . En  $\gamma = \gamma_{cr}$ , el autovalor más grande es cero. Esos  $\pi$ -saltos son linealmente estables.*
- ii) *El autovalor más grande de la linealización del  $\pi$ -saltos del tipo 2,  $\phi_\pi^2(x; \gamma)$ , es estrictamente positivo para  $0 < \gamma < \gamma^*$ . Estos  $\pi$ -saltos son linealmente estables.*
- iii) *El autovalor más grande de la linealización alrededor de  $\pi$ -fluxón de tipo 3,  $\phi_\pi^3(x; \gamma)$  es estrictamente positivo para  $0 < \gamma < \gamma_{cr}$ . Estos  $\pi$ -saltos son linealmente inestables. En el límite cuando  $\gamma \rightarrow 0$  y  $\gamma \rightarrow \gamma_{cr}$ , el autovalor más grande converge a cero.*

Entonces la linealización alrededor de los  $\pi$ -saltos tienen un autovalor cero si y solo si los  $\pi$ -saltos toman un valor múltiplo de  $\pi$  en  $x = 0$ . Puesto que el valor en  $x = 0$  relacionado con el punto  $d_i(\gamma)$ , ello puede ocurrir en  $\gamma = \gamma_{cr}$  para las ondas colindantes de tipo 1 y tipo 3; en efecto escribimos

$$\phi(x, t) = \phi_\pi^i(x; \gamma) + v(x, t)$$

alrededor de una solución  $\phi_\pi^i(x; \gamma)$ , y escribimos este cambio de variable en la ecuación (4.4.3); olvidándonos de todos los términos de mayor orden, obtenemos

$$[D_{xx} - \cos(\phi_\pi^i(x; \gamma)) + \theta(x)]\vartheta = D_{tt}\vartheta \quad (4.4.6)$$

usando la representación espectral  $v(x, t) = e^{\lambda t} \tilde{v}(x)$ , donde  $\vartheta(x)$  es una función continuamente diferenciable; obtenemos el siguiente problema de autovalores,

$$\mathfrak{J}^i(x; \gamma) \vartheta = \lambda^2 \vartheta \quad (4.4.7)$$

donde  $\mathfrak{J}^i$  es operador definido como

$$\mathfrak{J}^i(x; \gamma) = D_{xx} - \cos(\phi_\pi^i(x; \gamma) + \theta(x)) \quad (4.4.8)$$

El dominio natural de  $\mathfrak{J}^i$  es  $H_2(\mathbb{R})$ . Nosotros llamamos un autovalor  $\Lambda$  de  $\mathfrak{J}^i$  si existe una función  $\vartheta \in H_2(\mathbb{R})$ , la cual satisface  $\mathfrak{J}^i(x; \gamma) \vartheta = \Lambda \vartheta$ . Puesto que  $\mathfrak{J}^i$  depende suavemente de  $\gamma$ , los autovalores de  $\mathfrak{J}^i$  dependen también suavemente de  $\gamma$ . Ver sección 1.6.

El operador  $\mathfrak{J}^i$  es simétrico; por ellos todos los autovalores son reales. Un cálculo directo dá que el espectro continuo de  $\mathfrak{J}^i$  esta en  $(-\infty, -\sqrt{1-r^2})$ . Debido al teorema de la inclusión de Sobolev las autofunciones son continuamente diferenciales en  $H_2(\mathbb{R})$ ; luego aplicando el teorema de Sturm, resulta que los autovalores resultan acotados superiormente. Además, si  $\vartheta_1$  es autofunción de  $\mathfrak{J}^i$  con autovalor  $\Lambda_1$  y  $\vartheta_2$  es autofunción de  $\mathfrak{J}^i$  con autovalores  $\Lambda_2$ , con  $\Lambda_2 > \Lambda_1$ , existe al menos un cero de  $\vartheta_2$  entre todo par de ceros de  $\vartheta_1$  (incluyendo los ceros en  $\pm\infty$ ). De esto resulta que si la autofunción  $\vartheta_1$  tiene signo fijo, entonces  $\Lambda_1$  es el autovalor más grande de  $\mathfrak{J}^i$ .

El siguiente lema dá la condición necesaria y suficiente para que  $\mathfrak{J}^i$  tenga un autovalor  $\Lambda = 0$ .

**Teorema 4.4.2.** *El problema de autovalores*

$$\mathfrak{J}^i(x; \gamma) \vartheta = \Lambda \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}$$

*tiene un autovalor cero  $\Lambda = 0$ , si y sólo si se tiene una de las siguientes condiciones:*

- i)  $D_{xx} \phi_\pi^i(x; \gamma)$  es continuo en  $x = 0$ , esto es,  $\phi_\pi^i(0; \gamma) = k\pi$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- ii)  $D_x \phi_\pi^i(0; \gamma) = 0$  y existe algún  $x_\pm$ , con signo  $(x_\pm) = \pm 1$ , tal que  $D_x \phi_\pi^i(x_\pm; \gamma) \neq 0$ .

## 66 Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los $\pi$ -saltos en una $0 - \pi$ unión de Josephson.

---

**Prueba:** Puesto que  $\phi_\pi^i(x; \gamma)$  converge a un punto de silla para  $|x| \rightarrow \infty$ , implica que  $D_x \phi_\pi^i(x; \gamma)$  decae rápida y exponencial a 0 para  $|x| \rightarrow \infty$ . Como  $\phi_\pi^i(x; \gamma)$  resuelve (4.4.3), diferenciando con respecto a  $x$  tenemos que

$$\mathfrak{J}^i(x; \gamma) D_x \phi_\pi^i(x; \gamma) = 0 \quad x \neq 0$$

esto implica que para toda  $k$  constante la función  $W_k^i(x) = k D_x \phi_\pi^i(x; \gamma)$  satisface  $\mathfrak{J}^i(x; \gamma) W_k^i(x) = 0$  para  $x \neq 0$ . Luego para todo  $k_-$  y  $k_+$ , la solución:

$$W^i(x) = \begin{cases} W_{k_-}^i(x), & x < 0 \\ W_{k_+}^i(x) & x > 0 \end{cases}$$

resuelve  $\mathfrak{J}^i(x; \gamma) W^i(x) = 0$  para  $x \neq 0$ . La función  $w^i(x)$  es continuamente diferenciable si y sólo si se tienen las dos siguientes condiciones:

- 1)  $W_{k_-}^i(0_-) = W_{k_+}^i(0_+)$ ; en otras palabras,  $k_- D_x \phi_\pi^i(0_-; \gamma) = k_+ D_x \phi_\pi^i(0; \gamma)$ , puesto que  $\phi_\pi^i$  es continuamente diferenciable.
- 2)  $D_x W_{k_-}^i(0_-) = D_x W_{k_+}^i(0_+)$ ; esto es,  $k_- D_{xx} \phi_\pi^i(0_-; \gamma) = k_+ D_{xx} \phi_\pi^i(0_+; \gamma)$ . La primera condición que satisface si  $k_- = k_+$  ó  $D_x \phi_\pi^i(0_-; \gamma) = 0$ . Si  $D_x \phi_\pi^i(0_+; \gamma) = 0$ , nosotros podemos escoger  $k_\pm$  tal que la segunda condición es satisfecha y no obtenemos una condición trivial, excepto cuando  $D_x \phi_\pi^i(x; \gamma)$  es trivial para  $x > 0$ , ó  $x < 0$ .

Sí  $D_x \phi_\pi^i(0; \gamma) \neq 0$ , necesitamos que  $D_{xx} \phi_\pi^i$  sea continua en  $x = 0$  para satisfacer la segunda condición. Debido a que  $D_{xx} \phi_\pi^i(0; \gamma) = \sin(\phi_\pi^i(x; \gamma) + \theta(x)) - \gamma$ ,  $D_{xx} \phi_\pi^i$  es continua en  $x = 0$  si y sólo si  $\sin(\phi_\pi^i(0; \gamma)) = 0$ .

Estos argumentos muestran que si una de las condiciones son satisfechas, entonces  $\Lambda = 0$  es un autovalor de  $\mathfrak{J}^i$ .

Ahora asumamos que  $\Lambda = 0$  es un autovalor de  $\mathfrak{J}^i$ , esto implica que existe una función continuamente diferencial  $v^i(x)$  tal que  $\mathfrak{J}^i(x) v^i(x) = 0$  para  $x \neq 0$  y  $v^i(x) \rightarrow 0$  para  $|x| \rightarrow \infty$ . La única solución que decae hacia cero cuando  $+\infty$  son las soluciones sobre la variedad estable unidimensional, y en  $-\infty$  son las soluciones de la variedad inestable unidimensional. Las variedades estables e inestables son formados por múltiplos de  $D_x \phi_\pi^i$ ; luego existen  $k_\pm$  tales que

$$v^i(x) = \begin{cases} k_- D_x \phi_\pi^i(x) & \text{para } x < 0 \\ k_+ D_x \phi_\pi^i(x) & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Regresando a la situación de arriba y concluimos así que una de las condiciones del teorema anterior deben ocurrir.

La segunda condición en el teorema no ocurre. En efecto, la primera parte de la segunda condición,  $D_x\phi_\pi^i(0; \gamma) = 0$  sucederá sólo si  $d_i$  tiene una segunda coordenada cero y esto se tiene sólo si  $\gamma = \gamma^*$  con  $d_2 = d_3$ . En este punto la solución deja de existir y la solución  $\phi_\pi^3(x; \gamma^*)$  consiste de equilibrios para  $x > 0$ . Así esta solución no satisface la segunda parte de la segunda condición.

Para conocer el valor de  $\gamma$ , el cual satisface la primera condición, buscaremos la relación entre  $D_x\phi_\pi^i$  con  $\gamma$  multiplicando la ecuación estática (4.4.3) con  $D_x\phi_\pi^i$ , obtenemos

$$D_x[D_x\phi_\pi^i(x; \gamma)^2] = 2D_x[-\gamma\phi_\pi^i(x; \gamma) - \cos(\phi_\pi^i(x; \gamma) + \theta(x))], \quad x \neq 0$$

Integrando de  $\pm\infty$  a 0 y usando que  $D_x\phi_\pi^i(\pm\infty; \gamma) = 0$  se muestra que

$$(D_x\phi_\pi^i(0; \gamma))^2 = 2[-\gamma(\phi_\pi^i(0; \gamma) - \phi_\pi^i(-\infty; \gamma)) - \cos(\phi_\pi^i(0; \gamma)) + \cos(\phi_\pi^i(-\infty; \gamma))],$$

$$(D_x\phi_\pi^i(0; \gamma))^2 = 2[-\gamma(\phi_\pi^i(0; \gamma) - \phi_\pi^i(+\infty; \gamma)) + \cos(\phi_\pi^i(0; \gamma)) - \cos(\phi_\pi^i(+\infty; \gamma))],$$

sustrayendo estas dos ecuaciones y usando el hecho de

$$\phi_\pi^i(+\infty; \gamma) = \phi_\pi^i(-\infty; \gamma) + \pi,$$

obtenemos

$$0 = -\pi\gamma - 2\cos(\phi_\pi^i(0; \gamma)); \quad (4.4.9)$$

de aquí  $\cos(\phi_\pi^i(0; \gamma)) = \frac{\pi\gamma}{2}$ . Así la primera condición es satisfecha cuando  $\cos(\phi_\pi^i(0; \gamma)) = \pm 1$ ; luego  $\gamma = \frac{2}{\pi} = \gamma_{cr}$ .

En lo que sigue consideremos los autovalores de la linealización para  $\gamma$  pequeño. Notamos primero que para  $\gamma = 0$ , tenemos una expresión explícita para  $\pi$ -fluxón y luego el  $3\pi$ -saltos:

$$\begin{cases} \phi_{flux}(x - \ln(1 + \sqrt{2})) & \text{para } x < 0 \\ \pi - \phi_{flux}(-x - \ln(1 + \sqrt{2})) & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (4.4.10)$$

$$\begin{cases} \phi_{flux}(x + \ln(1 + \sqrt{2})) & \text{para } x < 0 \\ 3\pi - \phi_{flux}(-x + \ln(1 + \sqrt{2})) & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (4.4.11)$$

Las derivadas de ambas funciones son pares y  $\cos(\phi_\pi^i(0; \gamma) + \theta)$  es continua y par, puesto que  $\phi_\pi^1(0; 0) = \frac{\pi}{2}$  y  $\phi_\pi^2(0; 0) = \frac{3\pi}{2}$ .

Para  $\gamma \ll 1$ , la órbita homoclínica en el sistema con  $\theta = 0$  es crucial para la aproximación de las soluciones del tipo 2 al tipo 3. Está órbita es homoclínica hacia  $\arcsin(\gamma)$  y es denotada como  $\phi_h(x; \gamma)$ . Ella es aproximada hasta orden  $\gamma$  usando el  $2\pi$ -fluxón,  $\phi_{flux}$ , y su linealización según el siguiente teorema:

**Teorema 4.4.3.** *Para  $\gamma$  pequeño tenemos la siguiente conexión homoclínica par  $\phi_h(x; \gamma)$ , donde*

$$\phi_h(x; \gamma) = \phi_{flux}(x + L_\pi(\gamma)) + \gamma\phi_1(x + L_\pi(\gamma)) + \gamma^2 R_2(x + L_\pi(\gamma); \gamma), \quad x < 0 \quad (4.4.12)$$

donde la expresión para el  $2\pi$ -fluxón puede encontrar en (4.4.3),

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2} \left[ -1 + \cosh x + \int_0^x \frac{\xi}{\cosh \xi} d\xi \right] \frac{1}{\cosh x} - \arctan e^x \left( \frac{x}{\cosh x} + \sinh x \right),$$

y  $L_\pi(\gamma)$  es tal que  $\phi_h(-L_\pi(\gamma); \gamma) = \pi = \phi_{flux}(0)$ ; implicando que

$$L_\pi(\gamma) = \frac{1}{2} |\ln \gamma| + \ln \frac{4}{\sqrt{\pi}} + \mathcal{O}(\sqrt{\gamma}) \quad (4.4.13)$$

Aún más,  $\gamma^2 R_2(x + L_\pi(\gamma); \gamma) = \mathcal{O}(\gamma)$  es uniforme para  $x < 0$  y

$$\gamma\phi_1(L_\pi(\gamma); \gamma) = \mathcal{O}(\sqrt{\gamma}).$$

Así

$$\phi_h(0) = 2\pi - 2\sqrt{\pi}\sqrt{\gamma} + \mathcal{O}(\gamma); \quad (4.4.14)$$

finalmente,  $\phi_1(\tilde{x}; \gamma) = \mathcal{O}(1)$  y  $R_2(\tilde{x}; \gamma) = \mathcal{O}(1)$ , uniforme para  $\tilde{x} < 0$ .

**Prueba:** Haciendo  $\tilde{x} = x + L_\pi(\gamma)$  tal que  $\phi_h(-L_\pi(\gamma); \gamma) = \pi = \phi_{flux}(0)$ , obtenemos todavía que  $D_x \phi_h(L - \pi(\gamma); \gamma) = 0$  obtenemos la expansión  $\phi_h(x; \gamma) = \phi_{flux}(x) + \gamma\phi_1(x) + \gamma^2 R_2(x; \gamma)$ ,  $x < L_\pi(\gamma)$ ; linealizando alrededor de  $\phi_{flux}$  tenemos

$$\mathfrak{J}(x)\phi_1 = -1 \quad (4.4.15)$$

donde este operador es  $\mathfrak{J}(x) = D_{xx} - \cos(\phi_{flux}(x))$ ; el problema homogéneo tiene dos soluciones independientes

$$\psi_b(x) = \frac{1}{\cosh x}, \quad \psi_u(x) = \frac{x}{\cosh x} + \sinh x, \quad (4.4.16)$$

donde  $\Psi_b(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \phi_{flux}(x)$  es acotado y  $\Psi_u(x)$  es no acotada para  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Por el método de la variación de constantes para (4.4.15) obtenemos:  
 $\phi_1(x; A, B) = [A + \frac{1}{2} \cosh x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\xi}{\cosh \xi} d\xi] \frac{1}{\cosh x} + [B - \arctan e^x] (\frac{x}{\cosh x} + \sinh x)$ ,  
 $A, B \in \mathbb{R}$ .

La solución  $\phi_1$  de (4.4.15) tiene que ser acotable cuando  $x \rightarrow -\infty$  y normalizada por  $(\phi_1(0)) = 0$  ( $\phi_h(0) = \phi_{flux}(0) = \pi$ ); esto es,  $A = -\frac{1}{2}$  y  $B = 0$ . Tenemos  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_1(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_h(x) = \arcsen(\gamma) = \gamma + \theta(\gamma^3)$ .

Donde  $\phi_1$  es no acotada cuando  $x \rightarrow \infty$ , las partes no acotadas de  $\phi_1(x)$  y  $\frac{d}{dx} \phi_1(x)$  son

$$\phi_1|_u(x) = -\arctan e^x \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \phi_1|_u(x) = -\arctan e^x \cosh x. \quad (4.4.17)$$

Si  $x = \sigma |\ln \gamma|$ , el orden significativo es para  $\phi_1(x) = \theta(\gamma^{-\sigma})$ ;  $\gamma^2 R_2(x; \gamma)$  es del orden  $0(\gamma^{2-2\sigma})$  para  $\sigma > 0$  y  $x = \sigma |\ln \gamma| + \theta(1)$ ; esto es,  $\phi_h(x)$  bifurca cuando el orden es  $|\ln \gamma|$ .

También  $\phi_{appr}^1(x) = \phi_{flux}(x) + \gamma \phi_1(x)$  es una  $\theta(\gamma)$ -aproximación de  $\phi_h(x)$  en  $(-\infty, L]$  para  $L = \frac{1}{2} |\ln \gamma| + \theta(1)$ . Para un  $L$  tal que  $\phi_{flux}(L) + \gamma \phi_1(L) = \theta(\sqrt{\gamma})$ , obtenemos  $L_\pi = \frac{1}{2} |\ln \gamma| + \theta(1)$ , y con  $L_\pi$  es el valor de  $x$  para el cual  $0 = \frac{d}{dx} \phi_n(x) = \frac{d}{dx} \phi_{appr}^1(x) + \theta(\gamma) = \frac{d}{dx} \phi_{flux}(x) + \gamma \frac{d}{dx} \phi_1|_u(x) + \theta(\gamma)$ .

Si  $y$  es tal que  $e^x = \frac{y}{\sqrt{\gamma}}$ , de (4.4.1) y (4.4.17) obtenemos  $y = \frac{4}{\sqrt{\pi}} + \theta(\sqrt{\theta})$ , esto es,  $L_\pi(\gamma) = \frac{1}{2} |\ln \gamma| + \ln \frac{4}{\sqrt{\pi}} + \theta(\gamma)$ . Por lo cual se obtiene  $\pi_1(x; \gamma) = 0(1)$  y  $R_2(x; \gamma) = 0(1)$  uniformemente para  $x < 0$ , porque  $\phi_h(x)$  y  $\phi_{flux}(x)$  convergen en orden  $\gamma$  rápida y exponencialmente a equilibrios cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

## 4.5. Estabilidad para los diversos tipos de $\pi$ -fluxones.

### 4.5.1. Estabilidad para las soluciones de tipo 1.

teorema:

**Teorema 4.5.1.** *Para todo  $0 \leq \gamma < \gamma_{cr}$ , todos los autovalores de  $\mathcal{L}^1(x; \gamma)$  son estrictamente negativas. Para  $\gamma = \gamma_{cr}$ , el operador  $\mathcal{L}^1(x; \gamma_{cr})$  tiene a 0 como su mayor autovalor. Para  $\gamma = 0$ , el autovalor más grande es  $-\frac{1}{4}(\sqrt{\sqrt{5}+1})$ . Además, para todo  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{cr}$ , las semisaltos  $\phi_\pi^1(x; \gamma)$  de tipo 1 son lyapunov estable, en el siguiente sentido:  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$  :  $\forall \phi(x, t)$  solución de (4.4.1) con  $\phi(x; \gamma) \rightarrow 0$  y  $\phi(x; \gamma) \rightarrow \pi$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  con  $\|\phi(\bullet; 0) - \phi_\pi^1(0; \gamma)\|_{H^1} + \|\phi_t(\bullet; 0)\|_{L^2} < \delta$ , debe satisfacer  $\|\phi(0; t) - \phi_\pi^t(0; \gamma)\|_{L^2} + \|\phi_t(0; t)\|_{L^2} < \varepsilon$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

**Prueba.** Por el teorema (4.4.3) si que  $\mathcal{L}^1$  tiene un autovalor cero en  $\gamma = \gamma_{cr}$ . La autofunción es  $D_x \phi_\pi^1(x; \gamma_{cr})$ , la cual es siempre positiva puesto que  $\phi_\pi^1(x; \gamma)$  es monótonamente creciente. De el teorema de Sturm, sigue que  $\Lambda = 0$  es el autovalor más grande de  $\mathcal{L}^1$  en  $\gamma = \gamma_{cr}$ . Estudiamos ahora los autovalores de  $\mathcal{L}^1(x; 0)$ , el operador continuo y par  $\mathcal{L}^1(x; 0) - \Lambda$  tiene dos soluciones linealmente independientes.

Puesto que el punto de equilibrio es un punto de silla, y la razón de decaimiento hacia este punto es como  $e^{-x}$ ; si  $\Lambda > -1$  existe una solución que decae exponencialmente en  $+\infty$  y otra para  $-\infty$ , notamos la última por  $\vartheta_-(x; \Lambda)$ , y  $\vartheta_+ = \vartheta^+(x; \Lambda) = \vartheta_- = \vartheta_-(x; \Lambda)$  (puesto que  $\mathcal{L}^1$  es simétrico en  $x$ ); luego  $\Lambda$  es un autovalor si  $D_x \vartheta_+(0; \Lambda) = D_x \vartheta_-(0; \Lambda)$ , esto es  $\Lambda$  un autovalor si  $D_x V_+(0, \Lambda) = D_x V_-(0, \Lambda)$ ; esto es  $D_x \vartheta_-(0; \Lambda) = 0$  (ó si  $\vartheta_-(0; \Lambda) = 0$ ).

Se sabe que  $\vartheta_-(x; \Lambda) = \text{sech}(x - x_1)$ ,  $\vartheta_-(x; \Lambda) = e^{u(x-x_1)}[\tan(x-x_1) - \mu]$ , para  $\mu = \sqrt{\Lambda + 1}$ ; y como  $D_x \vartheta_+(0; \Lambda) = 0$  resulta que  $\mu^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\mu - \frac{1}{2} = 0$ ; de esto  $\sqrt{\Lambda + 1} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)$ , entonces  $\Lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ .

Asumamos ahora que  $\mathcal{L}^1(x; \gamma)$  tiene un autovalor positivo  $\Lambda^1(\gamma)$  para algún  $0 \leq \gamma < \gamma_{cr}$ , por la dependencia continua se tiene que  $\Lambda^1(\hat{\gamma}) = 0$  para algún  $0 < \hat{\gamma} < \gamma_{cr}$ . Sin embargo el teorema 4.4.3 afirma que esto no es posible.

La estabilidad en el sentido de Lyapunov se obtiene del siguiente Hamiltoniano temporal

$$H(\phi, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} (\phi_x)^2 - \cos(\phi + \theta) \gamma(\phi + \theta) \right] dx,$$

el cual resulta ser una función de lyapunov para el sistema (4.4.1); esto es, toda solución  $\phi(x, t) \in H^2(\mathbb{R})$  de (4.4.1) satisface  $\frac{d}{dt} H(\phi, \phi_t) = 0$ , y de esto  $H(\phi(\cdot, t), \phi_t(\cdot, t)) = H(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Además la linealización  $D^2 H$  en  $(\phi, P) = (\phi_\pi^1, 0)$  es dada por

$$D^2(\phi_\pi^1, 0) = \begin{pmatrix} -\mathcal{L}^1(x; \gamma) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

el cual es un operador estrictamente positivo sobre  $L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$  con dominio  $H_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$ .

Así que existe  $c > 0$  tal que para todo  $(\phi, P) \in H_2 \times L_2$  tenemos  $H(\phi, P) - H(\phi_\pi^1, 0) \geq c(\|\phi - \phi_\pi^1\|_{H_1}^2 + \|P\|_{L_2}^2)$ . Finalmente existe  $C > 0$  tal que  $H(\phi, P) - H(\phi_\pi^1, 0) \leq C(\|\phi - \phi_\pi^1\|_{H_1}^2 + \|P\|_{L_2}^2)$  para todo  $(\phi, P) \in H_2 \times L_2$ .

A continuación enunciamos dos lemas sin prueba:

#### 4.5.2. Inestabilidad para las soluciones de tipo 2 y 3:

**Teorema 4.5.2.** *Para todo  $0 < \gamma < \gamma^*$ , el autovalor más grande de  $\mathcal{L}^2(x; \gamma)$  es estrictamente positivo. En el límite  $\gamma \rightarrow 0$ , el autovalor más grande de  $\mathcal{L}^2(x; \gamma)$  converge hacia  $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ .*

**Teorema 4.5.3.** *Para todo  $0 < \gamma < \gamma_{c\gamma}$ , el autovalor más grande de  $\mathcal{L}^3(x; \gamma)$  es estrictamente positivo. Para  $\gamma = \gamma_{c\gamma}$ ,  $\mathcal{L}^3(x; \gamma)$  se aproxima a 0.*

#### 4.5.3. Retículo de $\pi$ -saltos en el límite continuo.

Para la ecuación (4.3.5) consideramos la evolución que surge de la ecuación  $0-\pi$  Sine-Gordon con una pequeña perturbación espacial; y tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4.5.4.** *Para todo  $a$  pequeño, la linealización alrededor de  $\pi$ -flujo tiene las siguientes propiedades:*

- (i) *El auto valor de la linealización sobre  $\pi$ -biador del salto  $\phi_\pi^1(x; a; \gamma)$  es estrictamente negativo para  $0 \leq \gamma < \gamma_{cr}(a)$ . En  $\gamma = \gamma_{cr}(a)$  el mayor autovalor es cero. Este  $\pi$ -salto es linealmente estable.*



## 72 Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los $\pi$ -saltos en una $0 - \pi$ unión de Josephson.

- (ii) El autovalor más grande de la linealización alrededor de  $\pi$ -fluxon del tipo 2,  $\phi_\pi^2(x; a; \gamma)$ , es estrictamente positivo para  $0 < \gamma < \gamma^*(a)$ . Este  $\pi$ -salto es linealmente inestable.
- (iii) El autovalor más grande de la linealización alrededor de  $\pi$ -fluxo de tipo 3,  $\phi_\pi^3(x; a; \gamma)$  es estrictamente positivo para  $0 < \gamma < \gamma_{c\gamma}(a)$ . Esta clase de  $\pi$ -salto es linealmente inestable. En el límite  $\gamma \rightarrow 0$  se tiene  $\gamma \rightarrow \gamma_{c\gamma}(a)$ , entonces el autovalor más grande converge a cero.

### 4.6. Resumen sobre semi-fluxones en la unión larga de Josephson con $\pi$ -discontinuidad.

La anisotropía ofrece la posibilidad de fases bias esto es, el  $\pi$ -salto en la fase de la corriente, unión se traduce en corriente crítica negativa; lo cual se da en la unión en las esquinas como lo muestra la siguiente figura 4.3, generando un flujo magnético fraccional en las esquinas.

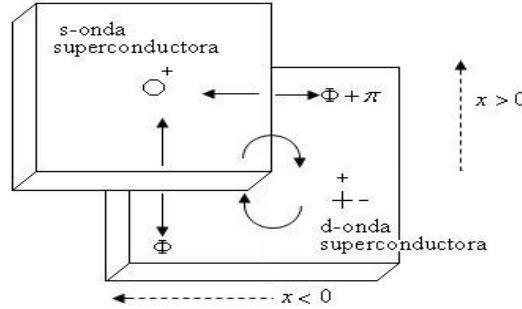


Figura 4.3: Esquema de una unión de Josephson en una esquina, S-onda ( $T_c$  bajo superconductor) y d-onda ( $T_c$  alto superconductor); se crea un semiflujo conectado a el punto de discontinuidad.

La electrodinámica de la unión de Josephson es descrita por la siguiente ecuación:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \theta(x)\sin\phi - \gamma + \alpha\phi_t, \quad (4.6.1)$$

## 4.6 Resumen sobre semi-fluxones en la unión larga de Josephson con $\pi$ -discontinuidad. 73

---

análoga a la ecuación (4.4.1), donde  $\alpha < 0$  es el coeficiente de amortiguamiento de la corriente electrónica a través de la unión de Josephson. En la discontinuidad se tiene  $\theta = 1$  para  $x < 0$  y  $\theta = -1$  para  $x > 0$ .

Para realizar simulaciones en el esquema de diferencias finitas reemplazamos  $t = n \Delta t$  y  $j = j \Delta x$ ,

$$\begin{aligned}\phi_{tt} &\approx [\phi_j^n - 2\phi_j^{n-1} + \phi_j^{n-2}] / \Delta t^2 \\ \phi_{xx} &\approx [\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n] / \Delta x^2 \\ \phi_t &\approx [\phi_j^n - \phi_j^{n-1}] / \Delta t \\ \text{sen}\phi &\approx \text{sen}\phi_j^{n-1}\end{aligned}$$

con la condición de frontera  $\phi_x = 0|_{x=\pm L}$  y  $\phi_y = 0|_{t=0}$ .

El  $0 - \pi$  semiflujo de la función de Josephson satisface la condición  $|\pi(\infty) - \pi(-\infty)| = \pi$ ; cuando  $\gamma = 0$  el único semiflujo (módulo  $2\pi$ ) es dado por:

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 4\arctan(\exp(x - x_0)), & x < 0, \\ 4\arctan(\exp(x + x_0)) - \pi, & x > 0, \end{cases} \quad (4.6.2)$$

donde  $x_0 = \ln(\sqrt{2} + 1)$ . Este semi-fluxon es una combinación de  $2\pi$ -fluxones de la ecuación Sine-Gordon con  $\theta = 1$  y  $\theta = -1$ .

Considerando las soluciones independiente del tiempo en (4.6.1),

$$\phi_{xx} = \phi(x)\text{sen}\phi - \gamma \quad (4.6.3)$$

Los dos semifluxos indicados en la siguiente figura 4.4 para  $\gamma \neq 0$ , correspondientes a las soluciones  $SF^{(2)}$  y  $SF^{(3)}$ , ubicadas en los retratos de fases obtenidos en dos planos soluciones las cuales, uno con  $\phi \equiv 1$  y otro con  $\phi \equiv -1$  hacen una conexión homoclínica, la cual proviene de una conexión heteroclínica

Cuando  $\gamma \in (0, \gamma^* = \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}})$  existen tres semifluxos, los cuales se reducen a dos en  $\gamma \in (\gamma^*, \gamma_c = \frac{2}{\pi})$ . El semiflujo  $SF^{(2)}$  no existe para  $\gamma > \gamma^*$ . Para  $\gamma > \gamma_c$  la ecuación (4.6.1) no admite soluciones del tipo semifluxos. Ver figura 4.4

Para estudiar estabilidad de las soluciones  $SF^{(2)}$  y  $SF^{(3)}$ , las cuales serán atractivas globales, expresamos  $\phi(x, t) = u(x)e^{\wedge t}$  y obtenemos la siguiente ecuación de autovalores:

**74 Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de los  $\pi$ -saltos en una  $0 - \pi$  unión de Josephson.**

---

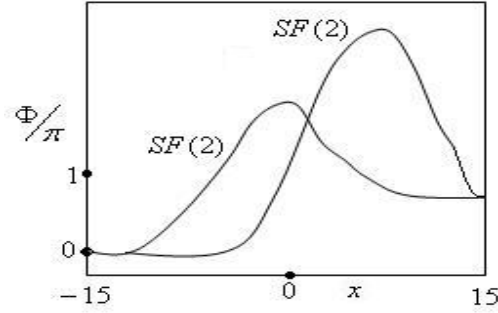


Figura 4.4: Gráfico de dos semiflujos no monótonos para  $\gamma = 0,01$ .

$$u_{xx} - \theta(x)u(x)\cos\Psi_0 = \Lambda u(x) \quad (4.6.4)$$

donde  $\Lambda = \angle^2 + \angle\alpha$ ; para las soluciones mencionadas, se observa que no son estables porque existe al menos un autovalor positivo para todo valor  $\gamma$ , ver figura 4.5.

En el límite  $\gamma \rightarrow 0$ , el autovalor más grande de  $SF^{(2)}$  tiende a  $\Lambda = \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} \approx 0,31$ . En  $\gamma = 0$ , la solución  $SF^{(2)}$  es del tipo  $3\pi$  salto (módulo  $2\pi$ ) la cual es dada por

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 4\arctan(\exp(x - x_0)), & x < 0. \\ 4\arctan(\exp(x + x_0)) + \pi, & x > 0. \end{cases}$$

El solitón  $SF^{(2)}$  tiende hacia una estabilidad neutral en el límite  $\gamma \rightarrow 0$  y  $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , este semi-flujo monótono tiende a  $O$  como su autovalor más grande.

Para estabilizar un semiflujo no autónomo consideramos una perturbación de la forma  $\delta(a)\sin\phi$  al lado derecho de la ecuación (4.6.1), donde  $\delta(a)$  es una  $\delta$ -distribución delta localizada en  $x = a$ .

Experimentalmente esta perturbación se puede hacer con un calentamiento localizado y usando iones luminosos.

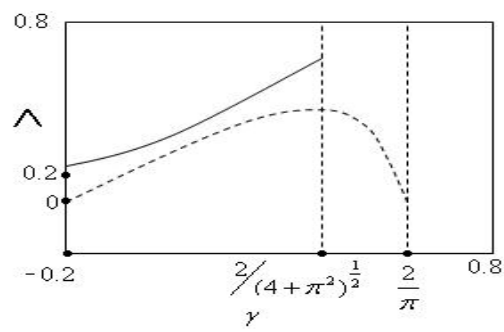


Figura 4.5: *Los autovalores más grandes como función de  $\gamma$ .*



## CAPÍTULO 5

---

### Control, acoplamiento y sincronización en la unión de Josephson

---

#### 5.1. Control a través de sistemas singularmente perturbados.

En esta sección vamos a estudiar sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y; \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y; \varepsilon) \end{cases} \iff \begin{cases} \varepsilon x' = f(x, y; \varepsilon) \\ y' = g(x, y; \varepsilon) \end{cases} \quad (5.1.1)$$

en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , existe interacción compleja del sistema rápido

$$\begin{cases} x' = f(x, y, 0) \\ y' = 0; \end{cases} \quad (5.1.2)$$

con el sistema lento siguiente

$$\begin{cases} 0 = f(x, y, 0) \\ y' = g(x, y, 0) \end{cases} \quad (5.1.3)$$

##### 5.1.1. El péndulo periódicamente excitado en amplitud $0(\varepsilon)$ .

Según la figura 5.1 siguiente, consideramos un péndulo simple periódicamente excitado por  $\varepsilon \gamma \cos(\Omega t)$ , con  $\varepsilon$  pequeño.

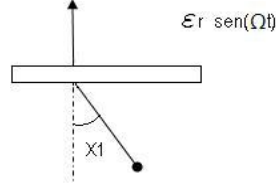


Figura 5.1: *Péndulo con período excitado  $\varepsilon\gamma\sin(\Omega t)$ .*

Entonces la ecuación del movimiento es la siguiente:

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon\dot{x}_1 + (1 - \varepsilon\gamma\cos(\Omega t))\sin x_1 = 0 \quad (5.1.4)$$

el cual tiene la representación siguiente como sistema  $\varepsilon$  - perturbado de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 + \varepsilon[\gamma\sin\theta\sin x_1 - \delta x_2] \\ \dot{\theta} = \Omega, \quad (x_1, x_2, \theta) \in T^1 \times \mathbb{R}^1 \times T^1; \end{cases} \quad (5.1.5)$$

este sistema proviene del siguiente sistema no perturbado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 \\ \dot{\theta} = \Omega \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Este último sistema tiene un Hamiltoniano dado por la función escalar

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \cos x_1; \quad (5.1.7)$$

Se observa que (5.1.6) tiene los equilibrios hiperbólicos  $(\pi, 0)$  y  $(-\pi, 0)$ , donde sus variedades estables e inestables están en la curva de nivel  $H = 1$ ; además este sistema tiene una órbita periódica

$$M = \{(x_1, x_2, \theta(t)) / (x_1, x_2, \theta(t)) = (\pi, 0, \Omega t + \theta_0) = (-\pi, 0, \Omega t + \theta_0)\} \quad (5.1.8)$$

conectada por un par de las trayectorias homoclínicas siguientes:

$$\Gamma^\pm = (x_{1h}^\pm(-t), x_{2h}^\pm\theta(t)) = (\pm 2\sin^{-1}(\tan(ht)), \pm \sec(ht), \Omega t + \theta_0). \quad (5.1.9)$$

Por el punto  $P^\pm = (x_{1h}^\pm(-t_0), x_{2h}^\pm(-t), \theta_0)$  trazamos el plano de Poincaré

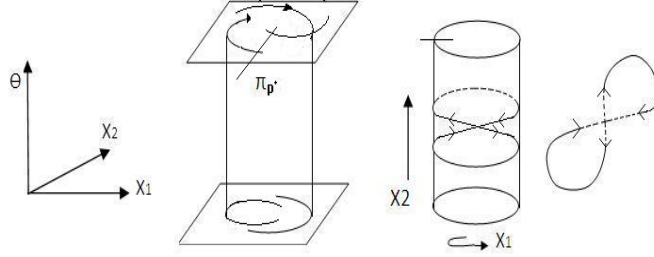


Figura 5.2: Mapeo de Poincaré para las trayectorias heteroclínicas del sistema (5.1.5).

$$\pi_{P^\pm} \equiv (D_x H(x_{1h}^\pm(-t_0), x_{2h}^\pm(-t_0), 0)) = (\text{sen} x_{1h}^\pm(-t_0), \text{sen} x_{2h}^\pm(-t_0), 0).$$

Como se observa en la figura 5.2, obtenemos su función de Melnikov la cual da la  $d^\pm$  distancia entre la variedad estable  $W^s(M)$  y la variedad inestable  $W^u(M)$ :

$$d^\pm(t_0, \theta_0, \delta, \gamma, \Omega) = \varepsilon \frac{[\int_{-\infty}^{+\infty} \{-\delta[x_{2h}^\pm(t-t_0)]^2 + \gamma x_{2h}^\pm(t-t_0) \text{sen} x_{1h}^\pm(t-t_0) \text{sen}(\Omega t + \theta_0)\} dt]}{\|D_x H(x_{1h}^\pm(-t_0), x_{2h}^\pm(-t_0))\|} \quad (5.1.10)$$

el numerador  $M^\pm$  de (5.1.10) resulta ser igual a

$$M^\pm(t_0, \theta_0, \delta, \gamma, \Omega) = -8\gamma + \frac{2\gamma\pi\Omega^2}{\text{senh}(\frac{\pi\Omega}{2})} \cos(\Omega t_0 + \theta_0) \quad (5.1.11)$$

Entonces de (5.1.11) obtenemos la siguiente ecuación de bifurcación en el plano  $\gamma - \delta - \Omega$ ,

$$\varepsilon\gamma = \frac{4\varepsilon\delta}{\pi\Omega^2} \text{senh}(\frac{\pi\Omega}{2}) + 0(\varepsilon^2) \quad (5.1.12)$$

la cual corresponde a la intersección transversal entre las variedades estables e inestables de la órbita periódica.

### 5.1.2. El péndulo paramétricamente forzado en amplitud $0(1)$ y frecuencia $0(\varepsilon)$ .

Corresponde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon\delta\dot{x}_1 + (1 - \gamma\text{sen}(\varepsilon\Omega t))\text{sen} x_1 = 0 \quad (5.1.13)$$



## 80 Control, acoplamiento y sincronización en la unión de Josephson

esto es, el siguiente sistema perturbado:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(1 - \gamma \text{sen} I) \text{sen} x_1 - \varepsilon \delta x_2 \\ \dot{I} = \varepsilon \Omega \end{cases} \quad (5.1.14)$$

con  $(x_1, x_2, I) \in T^1 \times \mathbb{R} \times T^1$  y corresponde al siguiente sistema no perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(1 - \gamma \text{sen} I) \text{sen} x_1 \\ \dot{I} = 0 \end{cases}$$

cuyo Hamiltoniano es  $H(x_1, x_2, I) = \frac{x_2^2}{2} - (1 - \gamma \text{sen} I) \cos x_1$ ; con los siguientes equilibrios hiperbólicos y órbitas periódicas

$$\begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\pi, 0), (-\pi, 0) \text{ para cada } I \in [0, 2\pi), 0 \leq \gamma < 1; \\ M = (\pi, 0, I) = (-\pi, 0, I) \text{ con } I \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Las Conexiones Homoclínicas son las siguientes  $\gamma^\pm \{(x_{h1}^\pm(t), x_{h2}^\pm(t), I)\} = (\pm 2 \text{sen}^{-1} \tanh(\sqrt{1 - \gamma \text{sen} I} t), \pm 2 \sqrt{1 - \gamma \text{sen} I} \sinh \sqrt{1 - \gamma \text{sen} I} t, I)$  y con ecuación de bifurcación  $\gamma = \frac{\frac{25}{\Omega}}{1 + (\frac{25}{\Omega})^2} + 0(\varepsilon)$ , como en (5.1.12).

### 5.1.3. El péndulo remolino.

En este caso  $\theta$  tiene un valor crítico  $\Omega$ , se comporta como  $\theta = \Omega + \varepsilon \tilde{\Omega} \cos(w, t)$   $0 < \varepsilon \ll 1$ ; debajo de  $\Omega$ ,  $\phi = 0$  es inestable, lo mismo que  $\phi = \pi$ .

También surgen dos nuevos equilibrios  $\phi = \bar{\phi} = \pm \cos^{-1}(\frac{g}{\ell \Omega^2})$ . Cuando  $\Omega \rightarrow \infty$  se espera que  $\bar{\phi} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . El modelo se presenta en la figura 5.3:

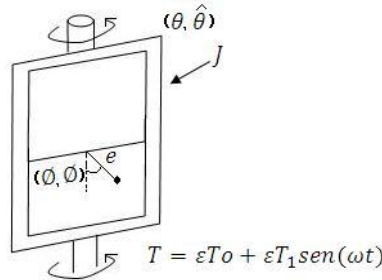


Figura 5.3: El péndulo remolino.

El sistema que rige este movimiento es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p_\phi \\ \dot{P}_\phi = \text{sen}\phi[-1 + p_\theta^2 \cos\phi/(\mu + \text{sen}^2\phi)^2] + \varepsilon(-c_\phi p_\phi), \quad \mu = \frac{j}{ml^2} \\ \dot{\phi} = \frac{P_\theta}{\mu + \text{sen}^2\phi} \\ \dot{P}_\theta = \varepsilon(-c_\phi p_\phi/(\mu + \text{sen}^2\phi) + T_0 + T_1 \text{sen}(wt)) = \varepsilon Q, \\ (\phi, P_\phi, \theta, P_\theta) \in T^1 \times \mathbb{R}^1 \times T^1 \times \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad (5.1.15)$$

donde  $T_0$  es el torque constante. Como el sistema  $\phi - P_\phi - P_\theta$  no depende de  $\theta$ , es suficiente analizar el sistema tridimensional:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p_\phi \\ \dot{P}_\phi = \text{sen}\phi[-1 + p_\theta^2 \cos\phi/(\mu + \text{sen}^2\phi)^2] + \varepsilon Q_\phi(P_\phi) \\ \dot{P}_\theta = \varepsilon Q_\phi(\phi, P_\theta, \Psi) \\ \dot{\Psi} = \omega, \quad \Psi(t) = \omega t \pmod{2\pi}; \end{cases} \quad (5.1.16)$$

Este último sistema tiene Hamiltoniano igual a  $H(\phi, P_\phi, P_\theta) = \frac{1}{2}[\frac{P_\theta^2}{\mu + \text{sen}^2\phi}] + \frac{1}{2}P_\phi^2 + (1 - \cos\phi)$ . El sistema (5.1.16) tiene equilibrios que generan bifurcación tipo orquilla; además  $\gamma_P(P_\theta) = (\pi, 0, P_\theta)$  y  $\gamma_D(P_\theta) = (0, 0, P_\theta)$  son sillas conectadas por un par de órbitas homoclínicas.

Usando sistemas restringidos a las variedades invariantes  $M_P(\gamma_P(P_\theta), \Psi_0)$  y  $M_D(\gamma_D(P_\theta), \Psi_0)$  para  $P_0 > \mu$  y  $\Psi_0 \in [0, 2\pi]$ , podemos describir comportamientos caóticos para el sistema (5.1.16)

Observando la variedad estable  $W^s(M_\varepsilon)$ , e inestables  $W^u(M_\varepsilon)$ , de la variedad lenta  $M_\varepsilon$ , como se muestra en la figura 5.4.

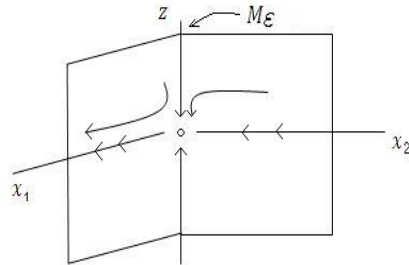


Figura 5.4: Variedades estable e inestables de  $M_\varepsilon$ .

#### 5.1.4. Oscilador de Duffing con control de retroalimentación:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - I - \varepsilon \delta_2 x \\ \dot{I} = \varepsilon(\gamma x_1 - \alpha I + \beta \cos \theta) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

con  $(x_1, x_2 I, \theta) \varepsilon \mathbb{R}^1 \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times T^1$ .

Es útil comparar este sistema, el cual modela el fenómeno de las vibraciones mecánicas, con los presentados hasta el momento en éste capítulo para los péndulos y la unión de Josephson.

#### 5.1.5. Unión de Josephson con problemas de valores de frontera singularmente perturbadas.

Sea  $\phi(x, t)$  la función de onda a través del “gap”, su localización a lo largo del “gap” es  $0 \leq x \leq 1$  y  $t \in \mathbb{R}^+$ , donde  $\phi$  satisface la ecuación de Sine-Gordon siguiente,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = 0, \quad (5.1.17)$$

y aplicamos un campo magnético proporcional a una constante  $L$  a ambos lados de la unión, con una corriente bios  $I$  aplicada en el lado derecho, y con las siguientes condiciones de frontera:

$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = L$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(1, t) = L + I$ . En condiciones estáticas tenemos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \sin \phi = 0, & \varepsilon \ll 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(0) = L, & \frac{\partial \phi}{\partial x}(1) = L + I; \end{cases} \quad (5.1.18)$$

El problema con el valor inicial  $\varepsilon^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \sin \phi = 0$   $\phi(0) = \phi_0$  con  $\phi_x(0) = L$  se resuelve para  $0 \leq x \leq 1$ . El valor terminal  $\phi_1$  se dá por el valor de  $I$  tal que  $I = \frac{1}{\varepsilon}(\phi_x - \varepsilon L)$ . Para cada  $0 \leq \phi(0) \leq 2\pi$  encontramos un  $I$  y con ello las soluciones de las curvas estables o inestables.

Aquí solo consideramos el caso  $\varepsilon \ll 1$  para el sistema (5.1.18) el cual es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d\phi}{dx} = \Psi \\ \varepsilon \frac{d\Psi}{dx} = \sin \phi; & \Psi(0) = \varepsilon L, \Psi(1) = \varepsilon(L + I). \end{cases} \quad (5.1.19)$$

Construimos una solución de (5.1.19) la cual intercepta las línea  $\Psi = \varepsilon L$  en  $x = 0$  con la línea  $\Psi = \varepsilon(L + I)$  cuando  $x = 0$ , tal como se ilustra en el retrato de fases de la siguiente figura 5.5. Un candidato para la cuasi-estática solución es  $\phi = 0$ ,  $\Psi = 0$ ; lo cual se ensaya construyendo la solución correcta que conecta estos puntos de frontera.

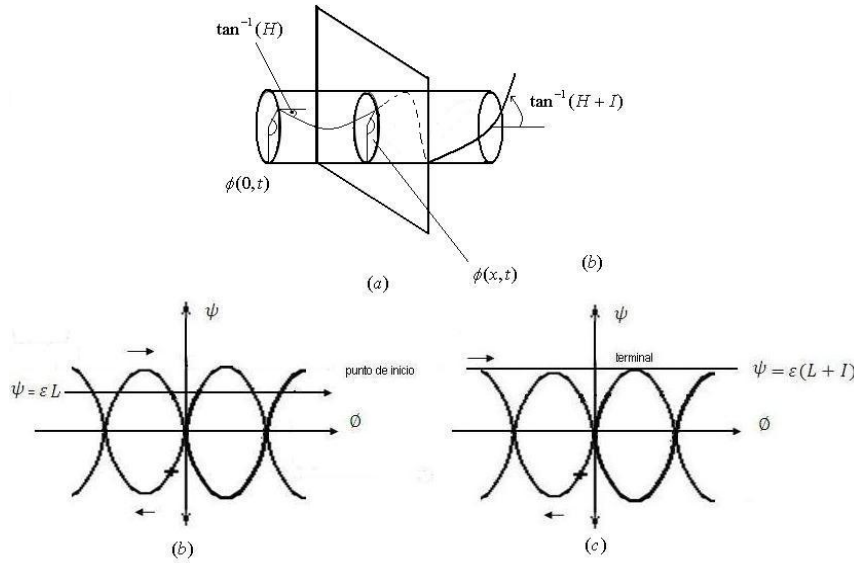


Figura 5.5: Analogía y casi estática solución, la cual conecta las condiciones de frontera singulares (5.1.19).

De la fórmula de variación de parámetros aplicada al sistema (5.1.19), primero buscamos la corrección al lado izquierdo mediante el siguiente cambio de variables  $\phi(x) = \varepsilon U(\frac{x}{\varepsilon})$ ,  $\Psi(x) = \varepsilon V(\frac{x}{\varepsilon})$  con  $V(0) = L$ ;  $(U(\varsigma), V(\varsigma)) \rightarrow (0, 0)$  cuando  $\xi = \frac{x}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ .

Entonces el problema para  $(U, V)$  es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\xi} = V \\ \frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{\varepsilon} \sin(\varepsilon U) = U + 0(\varepsilon), \end{cases} \quad (5.1.20)$$

Entonces  $U$  y  $V$  se pueden expresar en series de potencia en  $\varepsilon$ ,  $U = U_0 + \varepsilon U_1$ , así también  $V$ . Así vemos que existe soluciones  $(U_{(\varepsilon)}, V_{(\varepsilon)})$  las cuales satisfacen las soluciones  $U_{o(\xi)} = -Le^{-\xi}$ ,  $V_{o\xi(\xi)} = -Le^{-\xi}$ ; estas comienzan en la intersección de la variedad estable de  $(0, 0)$  y la condición

## 84 Control, acoplamiento y sincronización en la unión de Josephson

---

$V = L$ .

Luego construimos la corrección en la frontera derecha; para ello hacemos  $\eta = \frac{(1-x)}{\varepsilon}$ , cuando  $\eta = 0$  corresponde a  $x = 1$ , y cuando  $\eta \rightarrow +\infty$  corresponde a  $\frac{(1-x)}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ ; así  $\eta$  corresponde a la escala rápida, la cual se mueve hacia atrás desde  $x = 1$ .

El problema para  $\phi = \varepsilon u(\eta)$  y  $\Psi = \varepsilon V(\eta)$  corresponde al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\eta} = -v \\ \frac{dv}{d\eta} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{sen}(\varepsilon u) = -u + 0(\varepsilon), \end{cases} \quad (5.1.21)$$

con  $v(0) = L + I$  y  $(u(\eta), v(\eta)) \rightarrow (0, 0)$  cuando  $\eta \rightarrow +\infty$ .

La solución de (5.1.18) se puede construir como en el caso anterior; esto es, una solución única  $(u_0(\eta), v_0(\eta))$  tal que  $u_0(\eta) = (L + I)e^{-\eta}$ ,  $v_0(\eta) = (L + I)e^{-\eta}$ .

Combinamos estos resultados, y se espera que las soluciones aproximadas del problema (5.1.18) tenga la siguiente forma:

$$\begin{cases} \phi = -Le^{-\frac{x}{\varepsilon}} + (L + I)e^{\frac{(x-1)}{\varepsilon}} + 0(\varepsilon) \\ \Psi = \varepsilon(Le^{-\frac{x}{\varepsilon}} + (L + I)e^{\frac{(x-1)}{\varepsilon}} + 0(\varepsilon)) \end{cases} \quad (5.1.22)$$

la cual es la forma de las dos correcciones en la frontera. estático. Una mejor aproximación y conocimiento del término  $o(\varepsilon)$  se obtiene si  $\varepsilon > 0$  es tan pequeño que  $\varepsilon(L + I) < 1$ .

### 5.1.6. La dinámica del modelo Sine-Gordon singularmente perturbado.

Consideremos la siguiente ecuación para  $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ ,  $t > 0$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{senu} = \varepsilon[-\hat{\alpha}u_t + \hat{\lambda}u_{txx} + \hat{\lambda}\operatorname{sen}(wt)], \text{ con las condiciones de fronteras} \\ u(x, t) = u(-x, t) \text{ y } u(-\frac{L}{2}, t) = u(\frac{L}{2}, t) \end{cases} \quad (5.1.23)$$

con  $0 < \varepsilon\alpha \ll 1$ ,  $0 < \varepsilon|\lambda| \ll 1$ ,  $\omega = 1 - \varepsilon\tilde{\omega}$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $\tilde{\omega} > 0$ ; consideramos soluciones de la forma:

$$u_\varepsilon(x, t) = 2\sqrt{\varepsilon\tilde{\omega}}[B(X, T)e^{i\omega T} + B^*(X, T)e^{-i\omega T}] + 0(\varepsilon) \quad (5.1.24)$$

con  $x = \sqrt{2\varepsilon\tilde{\omega}}x$  y  $T = \varepsilon\tilde{\omega}t$ . Sustituyendo (5.1.24) en (5.1.23) obtenemos la siguiente ecuación perturbada no lineal de *Schrödinger*

$$-iB_T + B_{xx} + (|B|^2 - 1)B = \varepsilon[i\alpha B - i\wedge B_{xx} + i\bar{\lambda}], \quad (5.1.25)$$

donde  $\hat{\alpha} = 2\varepsilon\tilde{\omega}\alpha$ ,  $\hat{\wedge} = \wedge$ ,  $\hat{\lambda} = 8\varepsilon^{\frac{8}{3}}\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{\lambda}$ ; la ecuación (5.1.25) en  $[-\frac{L_x}{2}, \frac{L_x}{2}]$  con  $L_x = \sqrt{2\varepsilon\tilde{\omega}}L$ .

Asumimos que la solución de (5.1.25) es de la forma  $B(X, T) = \frac{1}{\sqrt{2}}c(T) + b(T)\cos(KX)$  con  $K = \frac{2\pi}{L_x}$ ; sustituyendo esta solución en (5.1.25) y sin tener en cuenta los valores de alto orden en la expansión de Fourier, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -i\dot{c} + (\frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|b|^2 - 1)c + \frac{1}{2}(cb^* + bc^*)b = i\varepsilon\alpha c + i\varepsilon\lambda, \\ -i\dot{b}(\frac{1}{2}|c|^2 + \frac{3}{4}|b|^2 - (1 + k^2))b + \frac{1}{2}(cb^* + bc^*)c = i\varepsilon\beta b, \end{cases} \quad (5.1.26)$$

con  $\lambda = \sqrt{2}\bar{\lambda}$  y  $\beta = (\alpha + \lambda k^2)$ . Usamos el cambio de coordenadas  $c = |c|e^{i\theta}$  y  $b = (x + iy)e^{i\theta}$ , para obtener:

$$\begin{cases} \dot{x} = -k^2y - \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y^3 + \varepsilon[\lambda\frac{y}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\text{sen}\theta - \beta x] \\ \dot{y} = (k^2 - 2I)x + \frac{7}{4}x^3 + \frac{3}{4}y^2 - \varepsilon[\lambda\frac{x}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\text{sen}\theta + \beta y] \\ \dot{I} = -\varepsilon[\lambda\sqrt{2I-x^2-y^2}\cos\theta + (\beta - \alpha)(x^2 + y^2) + 2\alpha I] \\ \dot{\theta} = 1 - I - x^2 + \varepsilon\lambda\frac{1}{\sqrt{2I-x^2-y^2}}\text{sen}\theta \end{cases} \quad (5.1.27)$$

en términos de  $H(x, y, I, \theta) = \frac{I^2}{2} - I - \frac{7}{16}x^4 - \frac{3}{8}x^2y^2 + \frac{1}{16}y^4 + (I - \frac{k^2}{2})x^2 - \frac{1}{2}k^2y^2$  y  $H_1(x, y, I, \theta) = -\lambda\sqrt{2I-x^2-y^2}\text{sen}\theta$ , tenemos que (5.1.27) es igual a:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial y} - \varepsilon\beta x \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial x} - \varepsilon\beta x \\ \dot{I} = \varepsilon\frac{\partial H}{\partial \theta} - \varepsilon 2\alpha I - \varepsilon(\beta - \alpha)(x^2 + y^2) \\ \dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial I} - \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial I}, \end{cases} \quad (5.1.28)$$

resultando que este sistema es invariante para la siguiente propiedad de simetría  $(x, y, I, \theta) \rightarrow (-x, -y, I, \theta)$ ; además (5.1.28) proviene del siguiente sistema no-perturbado:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial I}, \end{cases} \quad (5.1.29)$$

sistema para el cual el conjunto  $M = \{(x, y, I, \theta) / x = y = 0; \frac{k^2}{2} < I < I_{max}\}$  es una variedad invariante que contiene dos sillas y un par de órbitas homoclínicas simétricas, con variedades invariantes estables e inestables siguientes:

$$W^s(M) \equiv W^u(M) \equiv \{(x, y, I, \theta) / H(x, y, I) - H(0, 0, I) = 0, I > \frac{k^2}{\theta}\}, \quad (5.1.30)$$

las trayectorias en (5.1.30) se aproximan a las trayectorias de (5.1.29) cuando  $t \rightarrow \infty$ , como se ilustra en la siguiente figura 5.6

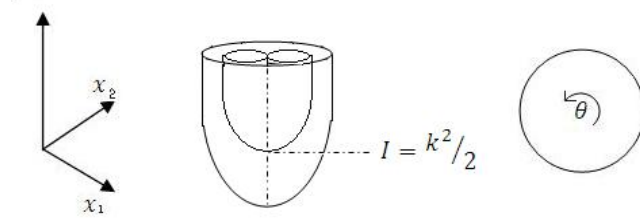


Figura 5.6: Variedades estables e inestables de  $M$ .

Sobre  $M$  el sistema (5.1.29) es igual al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{I} = \theta \\ \dot{\theta} = 1 - I \end{cases} \quad (5.1.31)$$

para el cual todas sus trayectorias son periódicas excepto para  $I = 1$ , el cual corresponde a un círculo de equilibrios

Para especificar las órbitas homoclínicas en  $W^s(M) \cap W^u(M)$ , usamos el cambio de coordenadas  $x + iy = \sqrt{2b}e^{i\phi}$ , obteniendo en estas nuevas coordenadas el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{B} = -2B(I - B)\sin(2\phi) \\ \dot{\phi} = k^2 - I(1 + \cos 2\phi) + B(\frac{3}{2} + 2\cos(2\phi)) \\ \dot{I} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 - I - B(1 + \cos(2\phi)), \end{cases} \quad (5.1.32)$$

este último sistema tiene el Hamiltoniano siguiente,

$$H = \frac{I^2}{2} - I - \frac{3}{4}B^2 + (I - k^2)B + B(I - B)\cos(2\theta) \quad (5.1.33)$$

igualando esta ecuación a  $H = \frac{I^2}{2} - I$  y luego reemplazamos en  $\dot{\phi}$ , obtenemos

$$\Psi = -\frac{1}{\sqrt{7}}\tanh^{-1}\left[\frac{k\sqrt{2I - k^2}}{7k^2}\tanh(\angle t)\right] + (1 - I)t + \theta_0, \quad (5.1.34)$$

donde  $\Psi = \theta + \phi$ .

Así obtenemos la órbita homoclínica asintótica al círculo de equilibrios cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , las cuales están contenidas en la fase "shift"  $\Delta\theta$  :  $\Delta\theta \equiv \theta(+\infty) - \theta(-\infty) = -2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{k}\right) - \frac{2}{\sqrt{7}}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2-k^2}}{7k^2}\right)$ , donde  $\frac{1}{2} < k < \sqrt{2}$ .

Para el sistema perturbado (5.1.27) en la variedad lenta  $M_\varepsilon$ , obtenemos el siguiente campo vectorial:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\varepsilon(\lambda\sqrt{2I}\cos\theta + 2\alpha I) \\ \dot{\theta} = 1 - I + \frac{\varepsilon\angle}{\sqrt{2I}}\sin\theta; \end{cases} \quad (5.1.35)$$

y si estamos interesados en la dinámica cerca de  $I = 1$ , se puede conocer mejor haciendo haciendo los siguientes cambios de variables y parámetros:  $I = 1 + \sqrt{\varepsilon\sqrt{2}\lambda}h$ ,  $\tau = \sqrt{\varepsilon\sqrt{2}\lambda}h$ ,  $\eta = \sqrt{\varepsilon\sqrt{2}\angle}$ ;  $x_\alpha = \sqrt{2}\frac{\alpha}{\angle}$ ; y obtenemos el siguiente sistema en  $A = \{(x, y, h, \theta)/x = y = 0, |h| < \infty\} \subseteq M_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} h' = -\cos\theta - x_\alpha - \eta(x_\alpha + \frac{1}{2}\cos\theta)h + 0(\eta^2) \\ \theta' = -h + \frac{\eta}{2}\sin\theta + 0(\eta^2), \end{cases} \quad (5.1.36)$$

para  $\eta = 0$  su Hamiltoniano es  $H(h, \theta) = \frac{h^2}{2} - \sin\theta - x_\alpha\theta$ , el cual corresponde al péndulo con una fuerza constante con equilibrios  $P_0 = (0, \pi - \arccos x_\alpha)$  y  $q = 0 = (\pi + \arccos x_\alpha)$ .

El retrato de fases para  $0 < x_\alpha < 1$  es dado en la siguiente figura 5.7



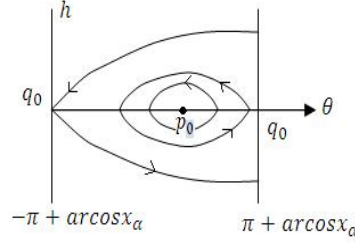


Figura 5.7: Retrato de fases de (5.1.36).

Si  $x_\alpha = 1$  los dos equilibrios colapsan en una bifurcación del tipo silla-nodo.

Para  $I = 1$  la función de Melnikov  $M(1, \theta_b, x_\alpha, x_\beta, k)$  (evaluada a partir del sistema no perturbado, y la cual se define como en la sección 1.4) es igual a la función  $M(1, \theta_b, x_\alpha, x_\beta, k)$  :

$$M(1, \theta_b, x_\alpha, x_\beta, k) = -\frac{\partial H_1}{\partial t} + \beta(x\dot{y} - y\dot{x}) + 2\alpha\theta + (\beta - \alpha)(x^2 + y^2)\dot{\theta} \quad (5.1.37)$$

con  $H_1 = -\lambda\sqrt{2I - x^2 - y^2}\sin\theta$ ; para  $q_\varepsilon$  la función de Melnikov es

$$M(1, \theta_b, x_\alpha, x_\beta, k) = \sqrt{2}\lambda\{\sin\theta_b^L - \sin\theta_b + 4x_\alpha k^2 \triangle\Psi + (x_\beta - x_\alpha) \frac{4}{7}(4\sqrt{2 - k^2}\lambda) + (1 + 3k^2) \triangle\Psi\} \text{ con } \theta_b^1\theta_b + \triangle, x_\beta = \sqrt{2}\frac{\beta}{\lambda}\theta, \quad (5.1.38)$$

Esta función  $M$  muestra cómo estas órbitas homoclínicas producen un “Horseshoe de Smale.”

## 5.2. Modo de Posición fija y transición al caos en sistemas disipativos.

### 5.2.1. Descripción del modelo.

Los sistemas disipativos con dos frecuencias exhiben transición al caos; lo cual se puede estudiar a través de mapeos de Poincaré sobre el círculo,  $S^1$ , de sistemas continuos en el toro  $S^1 \times S^1$ . El caos, en este caso, es causado por la presencia de una línea de resonancias, la cual registra la pérdida de reversibilidad en el espacio de parámetros.

## 5.2 Modo de Posición fija y transición al caos en sistemas disipativos. 89

---

Para nuestro caso la función oscilante de Josephson es representada por una ecuación diferencial con amortiguaciones, análoga a la correspondiente del movimiento pendular.

El fenómeno de fase de posición fija básicamente se debe al acoplamiento de los osciladores; sus iterados son en medida pequeña, el movimiento es periódico (esta es la razón entre sus frecuencias  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  es irracional ) como en los sistemas Hamiltonianos.

Las ondas densamente cargadas,  $CDW$ , en este caso son gobernadas por la siguiente ecuación diferencial:

$$\alpha\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \gamma\sin\theta = A + B\cos(\omega t) \quad (5.2.1)$$

donde  $\alpha = \frac{\hbar}{2eR}$ ,  $\gamma$  es la corriente crítica  $I_c$ ; A y B son las amplitudes de las microondas correspondientes a las corrientes continuas y discretas; el modelo correspondiente a la ecuación (5.2.1) es conocido como oscilación resistible de la unión de Josephson, RSJ. Para el caso del péndulo,  $\alpha$  es la masa,  $\beta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\gamma$  es el campo gravitacional; para ciertos valores los parámetros de la unión se pueden mover hacia un estado de “ruido”, lo cual se interpreta como una condición caótica.

En el sistema (5.2.1) el fenómeno de posición fase fija, una tendencia de la velocidad angular promedio  $\langle \dot{\theta} \rangle$  a fijarse como un múltiplo racional de la frecuencia del campo externo

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \frac{N}{M}\omega \quad (5.2.2)$$

Para pequeños valores de A el péndulo permanece cerca del valor de equilibrio 0; cuando A excede un valor crítico el sistema adquiere una velocidad promedio aproximadamente igual a  $A/B$  ( $\gamma$  y  $\beta$  no suficientemente grandes).

En la unión de Josephson el voltage V es dado por la siguiente ecuación

$$V = \frac{\hbar}{2e}\dot{\theta} \quad (5.2.3)$$

además la onda  $CDW$  es proporcional a la velocidad  $\theta$ ,  $I_{CDW} \sim \langle \dot{\theta} \rangle$ . Luego un modo de posición fija para  $\langle \dot{\theta} \rangle$  implica un modo fijo de la corriente transportada por  $CDW$  (la corriente debido al transporte normal de electrones se comporta de una manera normal y corresponde a la corriente

## 90 Control, acoplamiento y sincronización en la unión de Josephson

---

directa). Los roles relacionados con las corrientes y voltajes son los contrario para los sistemas con unión de Josephson respecto a los sistema CDW.

Estudiamos la ecuación (5.2.1) usando el mapeo de Poincaré con tiempo discreto  $T_n = \frac{2\pi n}{\omega}$  (esto es completando los ciclos del campo externo). Debido a que (4.2.1) es una ecuación de segundo orden, los valores de  $\theta_n$  y  $\dot{\theta}_n$  en  $T_n$  contiene toda la información del sistema; los valores de  $\theta_{n+1}$  y  $\dot{\theta}_{n+1}$  en  $T_{n+1}$  se logra mediante un mapeo como el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \dot{\theta}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(\theta_n, \dot{\theta}_n) \\ G_2(\theta_n, \dot{\theta}_n) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \theta_n \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

Así el mapeo  $R$  se puede considerar como un mapeo del plano en sí mismo (módulo  $2\pi$ ), ó como una aplicación sobre un cilindro (o un anillo) como se ilustra en la figura 5.8.

El Jacobiano de (5.2.4) es

$$\det \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \theta_n} & \frac{\partial G_1}{\partial \dot{\theta}_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial \theta_n} & \frac{\partial G_2}{\partial \dot{\theta}_n} \end{pmatrix} \right] = e^{-\frac{2\pi\beta}{\omega\alpha}} \equiv b \quad (5.2.5)$$

luego si el sistema es disipativo ( $\beta > 0$ ), el mapeo (5.2.1) es un mapeo que contrae áreas,  $|J| < 1$ ; el amortiguamiento implica que toda condición inicial es asintótica a una única curva invariante  $\theta(t)$ ; esto significa que  $\dot{\theta}$  es una función de  $\theta$ , o sea,  $R$  tiene una curva invariante  $g$ :

$$\dot{\theta} = g(\theta_n), \quad (5.2.6)$$

insertando (5.2.6) en (5.2.4) obtenemos una única relación

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = G_1((\theta_n, g(\theta_n))) \quad (5.2.7)$$

donde  $f$  es un mapeo del círculo  $0 < \theta_n \leq 2\pi$  sobre sí mismo;  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , ver figura 5.8:

Para  $\alpha \ll 1$  las relaciones (5.2.6)-(5.2.7) han sido establecidas analíticamente; de otra manera (5.2.7) se puede lograr resolviendo numéricamente.

En la figura 5.9 se muestra lo que se espera de la gráfica para el mapeo (5.2.7) si  $B = \beta = \gamma = 1$ ,  $\omega = 1,76$ ,  $\beta = 1,576$ ,  $A = 1,4$

Es un mapeo casi periódico, para el que conviene aproximar sus puntos periódicos.

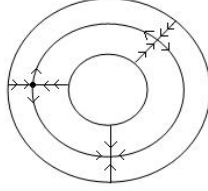


Figura 5.8: Puntos fijos del mapeo  $R$ .

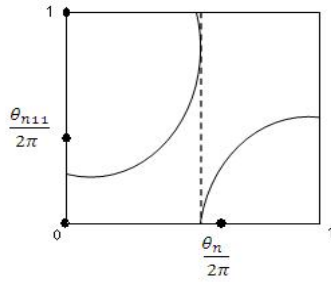


Figura 5.9: Gráfica del mapeo  $f : S^1 \rightarrow S^1$ .

### 5.2.2. El modo de posición fija (Mode-Locking) y la universalidad de los mapeos sobre el círculo.

Los mapeos de tipo “seno” sobre el círculo son definidos por la siguiente ecuación:

$$\theta_{n+1} = f_{\Omega}(\theta_n) = \theta_n + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n), \quad (5.2.8)$$

es un mapeo de período 1 y  $f_{\Omega}(\theta_n) = f_{\Omega}(\theta + a)$ . Para el mapeo  $f_{\Omega} : S^1 \rightarrow S^1$  es fácil identificar los puntos periódicos, quasiperiódicos y los que conducen al caos. El término lineal de (5.2.8) es  $\theta_n$ , el término bias es  $\Omega$ , estos términos de acoplamiento representan la frecuencia en ausencia del término de acoplamiento no lineal  $k$ . Estudiamos el acoplamiento de los iterados a través del número de rotación  $\omega$  siguiente

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{\Omega}^n - \theta}{n} \quad (5.2.9)$$

Claramente en ausencia de términos no lineales se tiene  $\omega = \Omega$ .

Bajo las iteraciones de  $\theta_n$  podríamos obtener  $\theta_n + Q = \theta_n + P$ ; resultando números de rotación racionales  $\omega = \frac{P}{Q}$ , casi periódicos cuando  $\omega = q \in \mathbb{Q}^c$ ; o

## 92 Control, acoplamiento y sincronización en la unión de Josephson

---

caóticos cuando los iterados se comportan irregularmente (ver teoría KAM; Kolmogorov, Arnol y Moser; quienes encontraron que el ciclo invariante y no-resonante cuando  $\omega$  es aproximado mediante la órbita casi-periódicas para el mapeo de Poincaré perturbado). La transición al caos se presenta cuando  $f(\theta)$  pierde la invertibilidad.

Nos enfocamos en la estructura de bifurcación de Locking (mode-locking) la cual también explica la transición del caos. El mapeo (5.2.8) se puede someter a procesos iterados (por ejemplo para  $\Omega = 0,2$  y  $k = 0,9$ ): para  $k < 1$  la función es estrictamente monótona;  $k = 1$  es cúbica (la inversa tiene una singularidad); para  $k > 1$  es el mapeo el cual tiene máximos locales y no es invertible. En  $0 < k < 1$  el número de rotación es el racional  $\frac{P}{Q} \in [\Omega, \Delta \Omega(\frac{P}{Q})]$ .

En todos los casos conviene estudiar los gráficos  $(\Omega, k)$  para distinguir los “Arnold Tongues” para  $k \in \mathbb{Q}$  y sus resonancias. Existe una lengua de resonancia  $T_{P/Q} = \{(\Omega, \frac{k}{2\pi}) / \omega(f_\Omega)P/Q \in [0, 1)\}$ ; la cual se describe en el plano  $(Re\angle, Im\angle)$  para  $\angle = \exp(i\frac{2\pi P}{2})$ .

Las gráficas de  $\theta$  contra  $f(\theta)$  para distintos valores de  $k$  ( $k < 1$ ,  $k = 1$ ,  $k > 1$ ). En la gráfica de  $\Omega$  contra  $k$ , para  $k = 1$  las órbitas quasi-periódicas constituyen un conjunto de Kantor;  $\Omega$  contra  $\frac{P}{Q}$  (la cual tiene una naturaleza autosimilar).

Para estudiar el espacio entre los pasos en la escala  $r$  estudiamos el siguiente número de huecos en  $\Omega$  que no corresponde a racionales  $N(r) = (1 - s(r))/\gamma$ , cuya dimensión  $D$  se calcula así:  $N(r) \sim (\frac{1}{r})^D$ , esto es,  $1 - S(r) \sim r^{1-D}$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

D resulta ser la dimensión fractal de la escalera de la gráfica  $\Omega$  contra  $\frac{P}{Q}$  (experimental se prueba que  $D \approx 0,8$ ); la escalera es el complemento de los intervalos de modo fijo en  $\Omega$ . Para  $k > 1$ , la transicional caos resulta por los saltos errantes entre las resonancias.

Ahora buscamos el parámetro  $v$  que mide la transición al caos, parámetro que tiene que ver con  $b$  (caracterización del exponente de la magnetización)  $1-k$  juega el rol de la temperatura reducida. Si  $N_1$  es el número de resonancias (el número de pasos los cuales son más anchos que una escala dada para  $\gamma$ ); experimentalmente se ha encontrado una bump function, ver sección 1.2, como la siguiente,

$$\gamma(N_1, 1 - k) = \gamma(N_1, 0) \exp(-b(N_1))(1 - k) \quad (5.2.10)$$

donde  $b(N_1) \sim N_1^{\frac{1}{Dv}}$  con  $\frac{1}{Dv} = 0,44 \pm 0,02$ . Si  $N_o$  es el número de resonancias de la periodicidad esta por debajo de la criticidad (surgimiento del conjunto de Kantor), tenemos que:

$$N_o \sim (1 - k)^{-Dv}, \quad \gamma_0 \approx (1 - k)^\vartheta, \text{ entonces } v \approx 2,63.$$

Si la medida dada para las órbitas periódicas la preparación se da de la siguiente forma:

$$M(k) = \int_{\gamma=0}^{(1-k)} \frac{\partial N_1}{\partial r} r dr \sim (1 - k)^{\vartheta(1-D)} \equiv (1 - k)^\beta, \text{ donde } \beta \sim 0,34 \pm 0,02.$$

De lo anterior resulta que

$$D = 1 - \frac{\beta}{\vartheta}.$$

Para la transición al caos de la unión de Josephson (movimiento del péndulo amortiguado) se necesita que en  $G$  de (5.2.4) el mapeo  $f$  sea creciente sobre el círculo  $f'(\theta_{n+1}) \approx -\infty$  ( $f'(f(0)) \rightarrow -\infty$ ); esto ocurre porque  $b$  en (5.2.5) es tal que  $\lambda_1 = \lambda_2 b^{\frac{Q}{2}}$  en puntos del ciclo límite  $Q$ .

Para conocer el comportamiento cualitativo para este tipo de modelos escogemos un mapeo analítico que sea simple en lugar de hacer la integración de la ecuación diferencial. Esta línea crítica es fundamentalmente un fractal, pues ella depende de  $Q$ , lo cual se obvio por la disipación del sistema. Así el mapeo (5.2.4) es esencialmente igual a:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) + b\gamma_n \\ \gamma_{n+1} = b\gamma_n - \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) \end{cases} \quad (5.2.11)$$

con  $0 < b < 1$ ,  $\theta_n$  es simétrico y  $\gamma_n$  hace las veces de  $\dot{\theta}_n$ ; y su matriz Jacobiana es

$$D = \begin{pmatrix} 1 - k \text{sen}(2\pi\theta), & b \\ -k \cos 2\pi\theta, & b \end{pmatrix} \quad (5.2.12)$$

como el Jacobiano de esta última matriz es  $b$ , cuando  $b \rightarrow 0$  recupera el comportamiento “seno” sobre el círculo; y cuando  $b \rightarrow 1$  es el mapeo estándar.

El estudio y comportamiento de una órbita periódica  $Q$  se hace a través de sus valores propios

$$M = D(\theta_Q^*) D(\theta_{Q-1}^*) \dots D(Q_1), \quad \lambda_1 = \lambda_2 = b^{\frac{Q}{2}}$$

## 94 Control, acoplamiento y sincronización en la unión de Josephson

---

De los valores grandes de  $Q$  se determina una curva en  $(k, \Omega)$   $((\beta, A)$  en la ecuación (5.2.1)).

Si  $T_\gamma M = 1 + b^Q$ ; la condición de criticalidad se obtiene cuando  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ; y la condición de estabilidad cuando  $\text{Traza}(D) = 1$ .

### 5.3. Sincronización de rotores y la unión de Josephson.

En un disco sobre un “shaft” de un motor eléctrico, la frecuencia de la rotación se puede ver como análoga a la frecuencia de oscilaciones, y entonces, para dos o más rotores es de interés conocer el acoplamiento de sus frecuencias.

Recordamos que la primera aproximación del modelo de Josephson es  $\frac{d\Psi}{dt} = \alpha(-\text{sen}\Psi + \gamma)$ , y del efecto externo sobre la rotación de tipo senoidal obtenemos

$$\frac{d\Psi}{dt} = \alpha(-\text{sen}\Psi + \gamma + I\text{sen}(\omega t)), \quad (5.3.1)$$

Considerando a  $I^{-1}$  como un pequeño parámetro, podemos expresar la solución de (5.3.1) como una expansión de pequeñas potencias de  $I^{-1}$ , de la siguiente forma:

$$\Psi = n(\omega t) + I^{-1}\Psi_{-1}(t) + \Psi_0(t) + \dots <\dot{\Psi}_{-1}> = <\dot{\Psi}_0> = 0 \quad (5.3.2)$$

Sustituyendo (5.3.2) en (5.3.1), obtenemos:

$$(5.3.4) \quad \Psi_{-1}(t) = \alpha\omega^{-1}\text{sen}(n\omega t) + \Psi_{-1}^0, \quad \Psi_{-1}^0 = \text{constante}.$$

Sustituyendo de nuevo (5.3.4) en (5.3.1), obtenemos

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = \alpha\gamma - n\omega - \alpha\text{sen}[n(\omega t) + \alpha I\omega^{-1}\text{sen}(\omega t) + Jd\Psi_{-1}^0]; \quad (5.3.3)$$

y usando la condición  $<\dot{\Psi}_0> = 0$ , resulta que

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = \alpha\gamma - n\omega - \alpha - \alpha\text{sen}\Psi_{-1}^0 J_n(-\alpha I\omega^{-1}) \quad (5.3.4)$$

donde  $J_n$  es una función de Bessel de primera clase. Como  $|\sin(\Psi_{-1}^0)| \leq 1$ , obtenemos que el ancho de la región de sincronización es

$$|\gamma - n(\frac{\omega}{\alpha})| < |J_n(-\frac{\alpha I}{\omega})| \quad (5.3.5)$$

La región de sincronización define los pasos sobre la gráfica  $V - I$  iguales a  $V_n = \frac{n\omega\hbar}{2e}$ .

Por ejemplo es de interés para generadores de potencia eléctricos con una carga común, si estos están sincronizados; lo cual tiene implicaciones en redes de electricidad, pues la pérdida de uno de los generadores conduce a interrupciones y hasta catástrofes.

## 5.4. Los osciladores acoplados

Se representan mediante el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 + k_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 + k_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{cases} \quad (5.4.1)$$

sus estados de fase se ubican en un trozo  $S^1 \times S^1$ , como en la figura 5.10

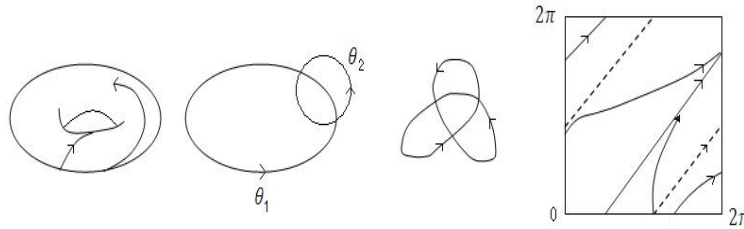


Figura 5.10: *Osciladores acoplados en paralelo.*

Si  $k_1 = k_2 = 0$  (sistemas desoplados) y  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in Q^c$ , entonces existen órbitas cuasi-periódicas.

De  $\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2 - (k_1 + k_2)\sin\phi$ , los puntos de equilibrio son las soluciones de tipo  $\sin\phi^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 + k_2}$ ; esta solución  $\phi^*$  corresponde a una posición de fase fija la cual separa constantemente a los dos osciladores.

En general el modelo de Kuramoto [Ku], para  $N$  osciladores acoplados mutuamente con frecuencias  $\omega_k$ , tienen dinámica gobernada por la siguiente sistema:



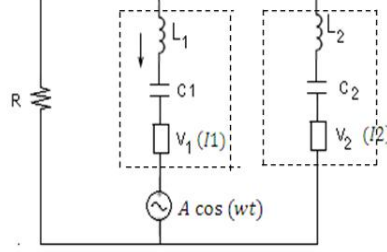


Figura 5.11: *Osciladores acoplados.*

$$\begin{cases} \frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\phi_j - \phi_k) \\ \text{con la siguiente condición para el acoplamiento en serie} \\ I_b = I_c \text{sen} \phi_k + \frac{\hbar}{2\varepsilon K} \dot{\phi}_k + \frac{\hbar}{2\varepsilon K} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \text{ para } k = 1, 2 \end{cases} \quad (5.4.2)$$

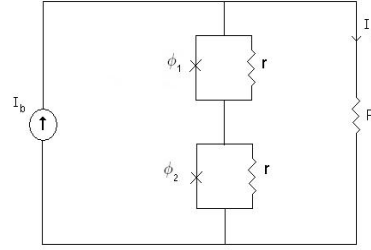


Figura 5.12: *Sistemas acoplados en serie.*

la primera ecuación de (5.4.2) es equivalente a

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon k \text{sen}(\phi_j - \phi_k) \quad (5.4.3)$$

Para lo cual usamos el siguiente cambio de variable:  $Z = x + iy = ke^{i\theta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\phi_j - \phi_k)$ . Observamos que si  $\bar{\omega}$  la frecuencia central;  $\theta = \bar{\omega}t$ ;  $k$  constante;  $\Psi_k = \phi_k - \bar{\omega}t$ ; entonces (5.4.3) es

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = \omega_k - \bar{\omega} - \varepsilon k \text{sen} \Psi_k \quad (5.4.4)$$

La solución isocrónica de (5.4.4) es  $\Psi_k = \text{sen}^{-1}[\frac{(\omega_k - \bar{\omega})}{\varepsilon k}]$ , y la frecuencia natural de los  $k$ -osciladores esta en la vecindad de  $\bar{\omega}$ ,  $|\omega_k - \bar{\omega}| \leq \varepsilon k$

Para el sistema (5.4.4) las ideas de Kuramoto se concretan en la existencia de una solución,

$\phi_k = 2 \tan^{-1} [\sqrt{\frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma + \gamma_c}} \tan(\frac{\Psi_k}{2} + \frac{\pi}{4})]$  y de la identidad  $\gamma - \gamma_c \sin \Psi = (\gamma^2 - \gamma_c^2)/(\gamma - \gamma_c \cos \theta)$ , obtenemos:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k - \dot{Q} \frac{\omega_0(\gamma - \gamma_c \cos \phi_k)}{(\gamma^2 - \gamma_c^2)} \quad (5.4.5)$$

Si  $\phi_k = \omega_0 t + \phi_k^0$ , la carga  $Q$  del circuito RCL se puede obtener de las diferentes uniones  $Q_k$  así:

$$Q_k = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{k_n} \cos(n\phi_k - \beta_n) \quad (5.4.6)$$

Expresando  $\Psi$  en términos de  $\phi$ , y obtenemos la siguiente ecuación diferencial para el primer armónico:

$$L\ddot{Q}_{k1} + (\gamma + NR)\dot{Q}_{k1} + \frac{Q_{k1}}{c} = RI_c^{-1}(I^2 - I_c^2 - I\sqrt{I - I_c})\cos(\omega_0 t + \phi_k^0) \quad (5.4.7)$$

$$\text{con solución } Q_{k1} = R \frac{[\gamma^2 - \gamma_c^2 - \gamma\sqrt{\gamma^2 - \gamma_c^2}]^{\frac{1}{2}}}{\left(\gamma_c \sqrt{1/c - L\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} + (\gamma + NR)^2 \omega_0^2} (\omega_0 t + \alpha + \phi_k^0),$$

$$\text{donde } \cos \alpha = \frac{L\omega_0^2 - 1/c}{\sqrt{(1/c - L\omega_0^2) + (\gamma + NR)^2 \omega_0^2}}.$$

Esta solución se sustituye en (5.4.4) para el período de rotación rápida  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  y se observa que para  $n > 1$  no contribuye a la ecuación promediada (5.4.7), y obtenemos

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k - \alpha), \quad (5.4.8)$$

donde  $\alpha = \frac{2eR^2 I \omega_0 / h - R\omega_0^2}{\sqrt{(1/c - L\omega_0^2) + (\gamma + NR)^2 \omega_0^2}}$ , resultado que coincide con la forma de (5.4.2).

Si el ángulo  $\alpha = 0$  la unión es atractiva; si  $\alpha \neq 0$  y para el caso  $\phi_1 = \phi_2 \dots = \phi_N$ , esta solución tiene una frecuencia que difiere de  $\omega_0$ , además es estable si  $\varepsilon \cos \alpha > 0$ .

La inestabilidad aparece en un regimen con fases distribuidas uniformemente,  $\phi_k^0 = \frac{2\pi n}{N}$ ; y la sincronización de la unión de Josephson, como en Kuramoto, corresponde a una transición controlada por una constante  $\varepsilon$  de acoplamiento finito.

## 5.5. Serie de arreglos globalmente acoplados de uniones de Josephson.

Corresponde a sistemas acoplados globalmente con movimientos de cargas resistivas y  $\gamma f$  con corriente bias. Este modelo corresponde a las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_i + g\dot{\phi}_i + \text{sen}\phi_i + i_L = i_{dc} + i_{\gamma f} \text{sen}(\Omega_{\gamma f} \tau) \\ i_L = \delta v(\tau) = \frac{\delta}{N} \sum_{j=1}^N g\dot{\phi}_j; i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (5.5.1)$$

donde  $\phi_i$  es la diferencia de fase en la unión  $i$ ,  $\tau = \omega_p t$ ,  $v = \gamma I_c$ ,  $\gamma$  la resistencia al movimiento;  $i_L$  corriente a través de de la carga resistiva;  $\vartheta = V_{total}/N$  es el voltage total a través del arreglo de uniones Josephson;  $\sigma = \frac{\gamma N}{R}$ ,  $R$  es la resistencia al movimiento global;  $\Omega_{\gamma f} = \omega_{\gamma f}/\omega_p$  es la frecuencia normalizada del tipo  $\gamma f$ .

En la ecuación (5.5.1), variado comportamiento espacio temporal la transición de la coherencia a la turbulencia no ha sido bien estudiada. Para  $N = 1$  es sistema (5.5.1) es

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + \bar{g}\dot{\phi} + \text{sen}\phi = L_{dc} + i_{\gamma f} \text{sen}(\Omega_{\gamma f} \tau), \\ \bar{g} = (1 + \sigma)g \end{cases} \quad (5.5.2)$$

El sistema (5.5.2) tiene movimiento caótico para  $\bar{g} < 1$  y  $\Omega_{\gamma f} < 1$ ; lo cual se observa en las gráficas de  $\phi$  contra  $i_{dc}$ , y también  $\phi$  contra  $i_{\gamma f}$ .

Un concepto aplicado a sistemas globalmente acoplados es el de “nicho”; esto significa que aunque la interacción entre los elementos es idéntica, la dinámica puede romperse en varios nichos, cada uno consta de elementos completamente sincronizados. Así  $\phi_i$  y  $\phi_j$  pertenecen al mismo nicho si  $\phi_i \equiv \phi_j$  para todo tiempo, el número de nichos es  $(N_1, N_2, \dots, N_{N_d})$ .

Las gráficas de  $i_d$  contra  $\phi$ , para  $i_{\gamma f}$ , muestra un fenómeno de histéresis causado por los dos atractores que aparecen entre órbitas de período 2 con diferente estabilidad causadas por la presencia de equilibrios sillas-nodos.

## 5.5 Serie de arreglos globalmente acoplados de uniones de Josephson. 99

---

Ver sección 1.9

El atractor más simple de sistemas del tipo (5.5.1) son aquellas con estructura coherente, esto es,  $\phi_i(\tau) = \phi(\tau)$ ,  $n_{cl} = 1$ ,  $N_1 = N$ . Entonces el linealizado de (5.5.1) alrededor de  $\phi(\tau)$  es

$$\delta\ddot{\phi}_i + g\delta\dot{\phi}_i + \delta\cos(\phi)\dot{\phi} + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N g\delta\dot{\phi}_j = 0; j = 1, 2 \dots N \quad (5.5.3)$$

En las siguientes coordenadas

$$\begin{cases} X = \sum_{j=1}^N \delta\phi_j \\ y = \delta\phi_k - \delta\phi_{k+1}; k = 1, \dots, N-1; \end{cases} \quad (5.5.4)$$

entonces la frontera de la estabilidad crítica es determinada por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \bar{g}\dot{X} + \cos X = 0, \\ \ddot{y}_k + g\dot{y}_k + \cos\phi y_k = 0; k = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (5.5.5)$$

La primera ecuación corresponde a (2.4.17); la segunda ecuación caracteriza la evolución de la perturbación de la diferencia entre dos celdas.

Puesto que la diferencia entre las dos es proporcional a  $\sigma$ , el sistema recobra el escenario de la única celda cuando  $\sigma = 0$ . Para valores específicos de  $i_{\gamma f}$ , las gráficas de  $i_{Qc} - \sigma$ ,  $i_{dc} - \phi$  muestran un caos espacio temporal via clusterización (nichos con bifurcaciones específicas). Además las gráficas de  $t = nT$  contra  $\phi_1 - \phi_2$  muestran el fenómeno de “intermitencia” de Pomeau - Mennville, explicados por el acoplamiento global. Ver sección 1.7.

Un ejemplo de sistemas acoplados es el seno-atrial y atrio-ventricular modelado por los dos osciladores no lineales siguientes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{c_1}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{L_1}[x_1 + g(x_2) + R(x_2 + x_4)] + A\cos(2\pi ft) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{c_5}x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{1}{L_2}[x_3 + f(x_4) + R(x_2 + x_4)] + A\cos(2\pi ft) \end{cases} \quad \text{con } f, y_g \text{ cúbicas.}$$

De otro lado si la corriente a través de todas las uniones de Josephson es la misma, el sistema que podría simular este proceso es,

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\Psi_k}{dt} + I_c \sin\Psi_k = I - \frac{dQ}{dt}, \quad (5.5.6)$$

donde  $\dot{Q}$  es la corriente de carga a través del  $RLC$ . La ecuación para la carga  $Q$  es

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \gamma \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \frac{\hbar}{2e} \sum_{k=1}^N \frac{d\Psi_k}{dt}. \quad (5.5.7)$$

Este sistema se representa en la figura 5.13 siguiente

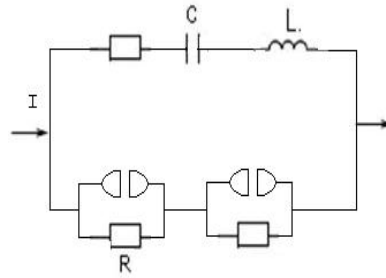


Figura 5.13: *Series de uniones de Josephson globalmente acopladas.*

---

## Conclusiones

---

1. Por un método analógico nos aproximamos a la complejidad del sistema que modela el fenómeno de la unión de Josephson mediante sistemas pendulares.
2. El conocimiento de las soluciones solitónicas se obtiene de la versión espacio-temporal dado por la ecuación Sine-Gordon, la cual modela mejor este problema, en sus diversas variantes y sus aplicaciones tecnológicas.
3. A través de herramientas como la linealización global en torno de soluciones recurrentes (periódicas y homoclínicas); y otras análogas como estudio de acoplamientos y sincronizaciones, obtenemos los conocimientos básicos de las dinámicas y bifurcaciones para arreglos discretos de multi-unión; las cuales explican la transición al caos causado por histéresis, resonancias, modo de posición fija, ó existencia de soluciones homoclínicas. Esto último fenómeno tiene importantes implicaciones en las aplicaciones interdisciplinarias.
4. Fue muy útil el método de la perturbación singulares asociados a este modelo para encontrar soluciones con períodos críticos y con condiciones de frontera singulares.
5. La descripción de la dinámica aquí estudiada es abundante en métodos los cuales se pueden transferir a otras aplicaciones tecnológicas de mucha importancia en esta época.



---

## Bibliografía

---

- [Fey] Richard Feynman; Electrodinámica Cuántica; Addison-Wesley, 1965.
- [S,STR] Steven H. Strongatz; Nonlinear Dynamics and chaos; Westview, 1994.
- [F,Hopp] Frank C. Hoppensteadt; Analysis and Simulation of chaotic systems; Springer Verlag, 2000.
- [Y.KuZ] Yuri A. Kuznetsov; Elements of applied Bifurcations theory; Springer Verlag, 1995.
- [LE, HO] M. Levi and C. Hoppensteadt; Dynamic of the Josephson Junction; Quarterly of applied Mathematics, July 1978.
- [S.Wig] Stephen Wiggins; Introductions to applied Nonlinear Dynamical Systems and chaos; Springer Verlag. 1990
- [C.Chi] Carmen Chicone; Ordinary Differential Equations with applications; Springer Verlag, 1999.
- [J.Cr R.O, O'Malley] Jane Cronin y R.E O'Malley; Analyzing multiscale phenomena using Singular perturbations Methods; A.M.S, 1998.
- [Fey] Feynman, vol. III, 1965
- [A. Pik, M.Ros, J. Kur] A. Pikovsky, Michael Rosenbblum, and J.Kurths; Sincronización, a universal concept in nonlinear sciences; Cambridge University Press, 2001.



- [A.G Mak, V.I Nek] A.G Maksimov and V.I Nekorker; Soliton and I-V Characteristics of long Josephson Junctions; International Journal of Bifurcations and chaos, vol 5 N°1, 492-503.
- [Ku] Kuramoto; Coupled Nolinear oscillators; 1973.
- [ Su Vgils ] S.A Van Gils; semifluxons in a long Josephson junctions with a  $\pi$ -discontinuity point; Proceeding of Int. conference on Differential Equations, Belgium 2003; Equadiff 2003.
- [T. Bo, M.H Je] Thmos Bohr and M.H Jansen; Mode Locking and the transition to chaos in dissipative systems; physica scripta T9, 50-58; 1985.
- [F.Xi H. Cedeira] Fajen Xie and Hilda A. Cerdeira; Clustering bifurcations and spatiotemporal intermittency in Rf-driver Josephson junction series array; Int Journal of bifurcations and chaos, vol 8 N°8, 1713-1718. 1998.
- [G. Des, A. Dol, S.a.VGil, HSus.] G. Derks, A Dollman, S.A Van Gils and H. Susanto; Stability analysis of  $\pi$ -Kinks in a 0 - II Josephson junction; Siam J. applied Dynamical System; vol N° 1, 99-141, 2007.
- [K.L] K Lenkheren; Physics and application of Josephson junction effect; John and Willey, 1982.
- [Si, Zi] A.H Silver y J.E. Zimmenvan; Physic Rev 141, 1966.
- [VaV] O. Várro; the  $0$  and the  $\pi$  phase Josephson coupling; Physical Rev B, 74 (2006).
- [Shi, Belk] L. Shilnikov y Belyakov ; On expanded neighbourhood of unstable Saddle focus equilibrium state; Math. Sbornik 81(1), 92-103; 1970.